Arab Journal of Sciences and Research Publishing
Volume (6), Issue (1) : 30 Mar 2020
P: 97 - 105
ISSN: 2518-5780
مجلة العربية للعلوم ونشـر الأبحـاث
المجلد (6)، العدد (1) : 30 مارس 2020 م
ص: 97 -105

# The Sub- Laplacian on The Heisenberg Group and It's Spectral Properties

**Soha Ali Salamah**
Faculty of Sciences || Al-Baath University || Syria

**Abstract:** in this paper we talk about the spectral theory of the sub-Laplacian on the Heisenberg group. Then we give a complete analysis of the spectrum of the unique self- adjoint extension of this sub-Laplacian on the one-dimensional Heisenberg group. The Heisenberg group is the most known example from the realm of nilpotent Lie groups, and plays an important role in several branches of mathematics, such as representation theory, partial differential equations and number theory... It also offers the greatest opportunity for generalizing the remarkable results of Euclidean harmonic analysis.

The results in this paper are valid for the sub-Laplacian on the n-dimensional Heisenberg group $\mathbb{H}^n, n > 1$ , in which the underlying space is $\mathbb{C}^n \times \mathbb{R}$, but we have chosen to present the results for the one-dimensional Heisenberg group $\mathbb{H}$ for the sake of simplicity and transparency.

**Keywords:** Heisenberg group, sub-Laplacian, twisted Laplacians, Fourier_Wigner transform, special Hermite functions, eigenvalues, spectrum .

# مؤثر لابلاس الجزئي على زمرة هايزنبرغ وخصائصه الطيفية

**سهى علي سلامة**
كلية العلوم || جامعة البعث || سوريا

**الملّخص:** في هذا البحث قدّمنا مناقشةً موجزة للنظرية الطيفيّة لمؤثر لابلاس الجزئي على زمرة هايزنبرغ. ثمّ قدّمنا تحليلاً كاملاً للطيف الخاص بالتمديد الوحيد المترافق ذاتياً لهذا المؤثر على زمرة هايزنبرغ أحاديّة البعد. إنّ زمرة هايزنبرغ تُعتبر بمثابة الزمرة الأكثر شهرةً في زمر لي عديمة القوى، وتلعب دوراً هاماً في العديد من فروع الرياضيات، مثل نظرية التمثيل، المعادلات التفاضليّة الجزئية، ونظرية الأعداد... إضافةً إلى أنّها تُقدّم توسعاً ملحوظاً في الحصول على نتائج مهمّة في التحليل التوافقي الإقليدي.

إنّ النتائج في هذا البحث محققة لأجل مؤثر لابلاس الجزئي على زمرة هايزنبرغ ذات البعد $n$ $(\mathbb{H}^n, n > 1)$, والتي هي بمثابة الفضاء $\mathbb{C}^n \times \mathbb{R}$, ولكننا اخترنا عرض النتائج لأجل زمرة هايزنبرغ ذات البعد الواحد $\mathbb{H}$, وذلك للسهولة والتبسيط.

**الكلمات المفتاحيّة:** زمرة هايزنبرغ, مؤثر لابلاس الجزئي, مؤثر لابلاس الملتوي, تحويل فورييه _ ويغنر, دوال هرميت الخاصة, القيم الذاتية, الطيف.

**المقدّمة:** يرتبط الإطار الرياضي لميكانيك الكم ارتباطاً وثيقاً بما يصفه علماء الرياضيات بنظريّة تمثيل الزمر. وفي بحثنا هذا سندرس هذه الفكرة ببعض التفصيل, ونعمل من خلال بعض الأنواع من الزمر, وذلك كنتيجةٍ للعلاقة الأساسيّة بين ميكانيك الكم و نظرية التمثيل, والتي ببساطة تدور حول أنّه عندما يكون لدينا جملة كموميّة فيزيائيّة تؤثر عليها زمرة $G$, فإنّ فضاء الحالة لهذه الجملة سيكون كما التمثيل الواحدي للزمرة المؤثرة عليها. وهذا يعني أنّ نظرية التمثيل تُقدّم معلوماتٍ مهمّةً حول فضاءات الحالة الميكانيكية الكموميّة عندما تؤثر زمرة ما على هذه الجملة الفيزيائية. [5], [7]

وبذلك تصبح الفيزياء بالنسبة لعلماء الرياضيات مصدراً مثمراً للغاية لدراسة التمثيلات الواحدية.

كانت بداية ظهور بنية زمر لي عندما لاحظ عالم الرياضيات Sophus Lie عام 1870 العلاقة الوثيقة بين هذا النوع من الزمر، وحلول بعض المعادلات التفاضليّة. ثمّ تمّت الملاحظة بأنّ المؤلدات لزمر لي المؤثرة على فضاءات مناسبة، لها الصيغة نفسها التي تتميز بها الدوال الخاصّة.

ومن الأمثلة عن زمر لي عديمة القوى نجد زمرة هايزنبرغ، وإنّ موضوع دراستنا في هذا البحث هو التحليل التوافقي على هذه الزمرة حيث عرّفنا مؤثر لابلاس الجزئي عليها ثمّ درسنا المفاهيم الهامّة المرتبطة بهذا المؤثر و طيفه.

**مشكلة البحث:** إنّ زمرة هايزنبرغ تدخل في العديد من المجالات التطبيقيّة بما في ذلك الجوانب المختلفة لميكانيك الكم. و قد سُمّيت هذه الزمرة عند علماء الرياضيات بزمرة هايزنبرغ، في حين أطلق عليها علماء الفيزياء اسم ( زمرة وايل ) weyl group. هذا و تُعتبر هذه الزمرة الأكثر شهرةً في زمر لي عديمة القوى، وتلعب دوراً هامّاً في العديد من فروع الرياضيات، و قد اعتمدنا عليها في بحثنا للوصول إلى العلاقات الهامّة للنظرية الطيفية لمؤثر لابلاس.

## مواد البحث و طرائقه:

سنتعرّف في بحثنا على زمرة هايزنبرغ، وسنُعرّف عليها مؤثر لابلاس الجزئي، ثمّ نُقدّم لمحةً عن النظرية الطيفيّة لمؤثر لابلاس الجزئي، ونبيّن أنّ الدوال الذاتية له تعطى من خلال دوال هرميت الخاصة. وفي نهاية البحث نتوصل إلى حساب الطيف للتمديد الوحيد المترافق ذاتياً والموجب لمؤثر لابلاس الجزئي $\boldsymbol{\mathcal{L}}$، والذي يُعتبر مؤثراً خطيّاً غير محدود من $L^2(\mathbb{H})$ إلى $L^2(\mathbb{H})$ على مجالٍ كثيف معطى في فضاء شوارتز (Schwartz) $S(\mathbb{H})$.

**تعريف (1): [1,3,4]**

إنّ زمرة هايزنبرغ هي زمرة من الانسحابات للنصف العلوي لفضاء سيجل في الفضاء $\mathbb{C}^{\boldsymbol{n+1}}$ (the Siegel upper half space)، ويعرّف عليها قانون التشكيل بالعلاقة:

$$(\mathrm{x},\mathrm{y},\mathrm{t})(u,v,s)=\left(x+u,y+v,t+s+\frac{1}{2}(u.y-v.x)\right)$$

ويُرمز لهذه الزمرة بالرمز $\mathbb{H}^n$.

كما يتحقق أن $\mathbb{H}^n=\mathbb{C}^n\times\mathbb{R}$ وفق قانون تشكيل مكافئ للقانون السابق يُعطى بالعلاقة:

$$(z,t)(w,s)=\left(z+w,t+s+\frac{1}{2}Im(z.\overline{w})\right)$$

**تعريف(2): [6]**

فضاء شوارتز على $\mathbb{H}^n$، هو فضاء شوارتز على $\mathbb{R}^{2n+1}$ المعرّف بالشكل:

$$S(\mathbb{H}^n)=\left\{\phi:\|\phi\|_{\alpha,\beta}\equiv Sup_{x\in\mathbb{H}^n}\left|x^\alpha\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\beta f(x)\right|<\infty\right\}$$

(واضح أن $\|.\|_{\alpha,\beta}$ نصف نظيم، و $S(\mathbb{H}^n)$ فضاء Frechet).

و حيث إنّ $\alpha,\beta$ دليلان متعدّدان.

- لدينا في زمرة هايزنبرغ $(2n+1)$ زمرة جزئية بوسيطٍ واحد، يقابلها $(2n+1)$ حقلاً متجهاً لا متغيّراً يسارياً، وهي: **[4, 5]**

$$X_j=\left(\frac{\partial}{\partial x_j}-\frac{1}{2}y_j\frac{\partial}{\partial t}\right)\qquad j=1,2,\dots,n$$

$$Y_j = \left(\frac{\partial}{\partial y_j} + \frac{1}{2} x_j \frac{\partial}{\partial t}\right) \qquad j = 1,2,\dots,n$$
$$T = \frac{\partial}{\partial t}$$

وإنّ هذه الحقول المتجهة تولّد جبر لي $\mathfrak{h}_n$ لزمرة هايزنبرغ. وتكون علاقة التبادل الوحيدة غير التافهة هي العلاقة: $\left[X_j, Y_j\right] = T \qquad ; j = 1,2,\dots,n$

- لدينا على زمرة هايزنبرغ الانسحابات اليسارية $L_g$ المعرَّفة لأجل $g \in \mathbb{H}^n$ بالشكل: [7]

$$L_g f(h) = f(g^{-1}h) \qquad ; h \in \mathbb{H}^n$$

ولدينا أيضاً الدورانات المعرَّفة بالشكل: $R_\sigma f(z,t) = f(\sigma z, t)$

و ذلك لأجل كل $\sigma \in U(n)$, حيث $U(n)$ هي الزمرة الواحديّة.

وإنّ هذه الدورانات هي أُوتومورفيزمات (automorphisms) لزمرة هايزنبرغ.

وبدلاً من التمديدات المألوفة $x \to rx$ سيكون لدينا التمديد غير الإيزوتروبي (nonisotropic)

$$\delta_r(z,t) = (rz, r^2 t)$$

ومن الواضح أنّ $\delta_r$ أيضاً أُوتومورفيزم (automorphisms) لزمرة هايزنبرغ.

**النتائج:** قدّمنا في هذا البحث جانباً من الترابط بين التحليل التوافقي و نوع من أنواع زمر لي, و هي زمرة هايزنبرغ. حيث عرّفنا مؤثر لابلاس على هذه الزمرة و درسنا النظرية الطيفية لهذا المؤثر و توصلنا إلى مبرهناتٍ و علاقاتٍ هامّة.

**المناقشة:**

**1- مؤثر لابلاس الجزئي على زمرة هايزنبرغ:**

- بأخذ مؤثر تفاضلي $P$ على $\mathbb{H}^n$ فإنّنا نقول عنه إنّه لا متغيّر يسارياً إذا كان تبديلياً مع $L_g$ لأجل كل $g \in \mathbb{H}^n$ , ونقول إنّه لا متغير الدوران إذا كان تبديلياً مع $R_\sigma$ لأجل كل $\sigma \in U(n)$. [7]_[8]

وكذلك نقول عن هذا المؤثر إنّه متجانس من الدرجة $\alpha$ إذا تحققت العلاقة: $P\big(f(\delta_r g)\big) = r^\alpha P f(\delta_r g)$.

- ويمكن أن نتبيّن وصولاً إلى ثابت مضاعف وجود مؤثر تفاضلي وحيد لا متغيّر يسارياً, ولا متغير الدوران, ومتجانس من الدرجة الثانية. ندعو هذا المؤثر الوحيد مؤثر لابلاس الجزئي ( أو Kohn_Laplacian ) على زمرة هايزنبرغ, علماً أنّه يتمتع بالعديد من الخصائص التي يحققها مؤثر لابلاس على $\mathbb{R}^n$.

**تعريف(3):** [8]_[4]

يُعطى مؤثر لابلاس الجزئي الذي رمزنا له بالرمز $\mathcal{L}$ من خلال الصيغة الآتية:

$$\boldsymbol{\mathcal{L}} = -\sum_{j=1}^{n}\left(X_j^2 + Y_j^2\right)$$

حيث $X_j, Y_j$ هي الحقول المتجهة اللامتغيرة يسارياً التي سبق وعرفناها.

وبحسابٍ صريح نجد: $\boldsymbol{\mathcal{L}} = -\Delta_z - \frac{1}{4}|z|^2\partial_t^2 + N\partial_t$ حيث $\Delta_z$ هو مؤثر لابلاس على $\mathbb{C}^n$ و $N = \sum_{j=1}^{n}\left(x_j \frac{\partial}{\partial y_j} - y_j \frac{\partial}{\partial x_j}\right)$ هو مؤثر الدوران.

**مبرهنة هورماندر (HÖrmander theorem):[10]**

ليكن $P$ مؤثراً تفاضلياً معطى بالصيغة: $P=\sum_1^r X_j^2+X_0+c$

حيث $X_0,\dots,X_r$ ترمز إلى مؤثرات تفاضلية متجانسة من المرتبة الأولى في المجموعة المفتوحة $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ والمعاملات $c$ تنتمي إلى $C^\infty(\Omega)$ (و هو فضاء الدوال القابلة للاشتقاق عدداً لا نهائيّاً من المرات على $\Omega$, و التي جميع مشتقاتها مستمرّة على $\Omega$ [6]) ولنفرض أنّه من بين المؤثرات:

$$X_{j_1},[X_{j_1},X_{j_2}],\left[X_{j_1},[X_{j_2},X_{j_3}]\right],\dots,\left[X_{j_1},\left[X_{j_2},[X_{j_3},\dots,X_{j_k}]\right]\right]\qquad ;j_i=0,1,\dots,r$$

يوجد $n$ منها مستقلة خطياً في أي نقطة من $\Omega$, عندئذٍ فإنّ $P$ فوق ناقصي.

**نتيجة(1):**

بما أنّ: $[X,Y]=T$ فينتج من المبرهنة السابقة أنّ $\boldsymbol{\mathcal{L}}$ فوق ناقصي.

**تعريف(4):[9]**

لنُعرّف الآن مؤثر لابلاس الملتوي:

لأجل $\tau\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ لتكن $Z_\tau,\bar{Z}_\tau$ هي مؤثرات تفاضلية جزئية معطاة بالشكل: $Z_\tau=\frac{\partial}{\partial z}+\frac{1}{2}\tau\bar{z}$

و $\bar{Z}_\tau=\frac{\partial}{\partial\bar{z}}-\frac{1}{2}\tau z$

عندئذٍ نعرّف مؤثر لابلاس الملتوي $\boldsymbol{\mathcal{L}}_\tau$ بالشكل: $\boldsymbol{\mathcal{L}}_\tau=-\frac{1}{2}(Z_\tau\bar{Z}_\tau+\bar{Z}_\tau Z_\tau)$

وبشكل أكثر دقة يكون: $\boldsymbol{\mathcal{L}}_\tau=-\Delta+\frac{1}{4}(x^2+y^2)\tau^2-i\left(x\frac{\partial}{\partial y}-y\frac{\partial}{\partial x}\right)\tau$

**ملاحظة(1): [6]**

لتكن $f$ دالة من المجموعة الجزئية المفتوحة $\Omega$ من $\mathbb{R}^n$ إلى فضاء باناخ $B$ مع النظيم $|\ .\ |_B$, نقول عن الدالة $f$ إنّها قابلة للاشتقاق في $x_0\in\Omega$ إذا وجد تطبيق خطي $\acute{f}(x_0):\mathbb{R}^n\to B$ بحيث تتحقق العلاقة:

$$\frac{1}{|x-x_0|_{\mathbb{R}^n}}\left|f(x)-f(x_0)-\acute{f}(x_0)(x-x_0)\right|_B\xrightarrow[x\to x_0]{}0$$

ندعو $\acute{f}(x_0)$ مشتقة $f$ في $x_0$.

نقول إنّ $f$ من الصف $C^1$ إذا كان $x\mapsto\acute{f}(x)$ مستمر, ونقول إنّ $f$ من الصف $C^2$ إذا كان $x\mapsto\acute{f}(x)$ من الصف $C^1$, وهكذا...

وتكون الدالة $f$ من الصف $C^k$ إذا وفقط إذا كانت جميع المشتقات الجزئية من المراتب $1,2,\dots,k$ موجودة ومستمرة.

ونقول إنّ $f$ من الصف $C^\infty$ إذا كان $f$ من الصف $C^k$ لأجل كل $k\in\mathbb{N}$. في هذه الحالة يكون $C^\infty=\bigcap_{k=1}^{\infty}C^k$.

**نتيجة(2):** إنّ العلاقة القياسيّة بين مؤثر لابلاس الجزئي و مؤثر لابلاس الملتوي تُعطى من خلال المبرهنة الآتية:

**مبرهنة $(2)$**: لتكن $u \in S'(\mathbb{H}) \cap C^{\infty}(\mathbb{H})$ وليكن $\hat{u}(z,\tau)$ هو توزيع بطيء التزايد بالنسبة لـ $\tau$ على $\mathbb{R}$ لكل $z$ من $\mathbb{C}$, وليكن $\breve{u}$ هو تحويل فورييه العكسي لـ $u$ بالنسبة لـ $t$. عندئذٍ فإنّه تقريباً لأجل كل $\tau$ من $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ يتحقق:

$$(\mathcal{L}u)^{\tau} = \mathcal{L}_{\tau}u^{\tau}$$

حيث:

$$(\mathcal{L}u)^{\tau}(z) = (\mathcal{L}u)^{\vee}(z,\tau) \quad , \quad u^{\tau}(z) = u^{\vee}(z,\tau) \quad ; z \in \mathbb{C}$$

و حيث: $S'(\mathbb{H})$ هو فضاء التوزيعات المتزايدة ببطء في $\mathbb{H}$, و هو الفضاء الثنوي لـ $S(\mathbb{H})$. [5]

**تعريف$(5)$**:[**6**] إن تحويل فورييه الكلاسيكي في الفضاء $\mathbb{R}^n$ لدالة $f$ , و يُرمز له بـ $\hat{f} = Ff$, يُعرّف بالشكل:

$$\hat{f}(\xi) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\xi} f(x)dx$$

**تعريف$(6)$**:[7] بأخذ $\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\psi} \in \boldsymbol{L^2}(\mathbb{R}^n)$, **لنعرف الدالة:**

$$V_{\varphi}(\psi,z) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}}\int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\xi}\varphi\left(\xi + \frac{y}{2}\right)\bar{\psi}\left(\xi - \frac{y}{2}\right)d$$

ندعو هذه الدالة تحويل فورييه_ ويغنر $(Fourier - Wigner\ transform)$ لـ $\varphi$ و $\psi$.

**2. النظرية الطيفية لـ $\mathcal{L}$:**

**تعريف$(7)$**:[**2, 11**] لأجل كل عدد صحيح غير سالب $k$ فإنّ دوال هرميت ذات البعد الواحد $h_k$ تُعرّف بالشكل:

$$h_k(x) = \frac{(-1)^k}{\sqrt{2^k k!\sqrt{\pi}}} e^{\frac{x^2}{2}} \frac{d^k}{dx^k}\left(e^{-x^2}\right)$$

ولأجل أي دليل متعدّد $\vartheta = (\vartheta_1, \dots, \vartheta_n)$ فإنّنا نعرّف دوال هرميت ذات $n$ بعد بالجداء التنسوري:

$$h_{\vartheta}(x) = \prod_{i=1}^{n} h_{\vartheta_i}(x_i) \qquad ; x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$$

إنّ الدوال الذاتية للمؤثر $\mathcal{L}$ تدعى دوال هرميت الخاصة, وهي تعرّف بالشكل: [**11**] − [**2**]

لأجل أي دليلين متعدّدين $\mu, \vartheta$ فإنّ دوال هرميت الخاصة $\Phi_{\mu,\vartheta}$ تعطى بالشكل:

$$\Phi_{\mu,\vartheta}(z) = V\left(h_{\mu}, h_{\vartheta}\right)(z)$$

حيث $h_{\mu}, h_{\vartheta}$ هي دوال هرميت على $\mathbb{R}^n$.

**نتيجة$(3)$**:[**11**] **بالحساب المباشروباستخدام العلاقات:**

$$\left(-\frac{d}{dx} + x\right)h_k(x) = (2k+2)^{\frac{1}{2}}\, h_{k+1}(x)$$

$$\left(\frac{d}{dx} + x\right)h_k(x) = (2k)^{\frac{1}{2}}\, h_{k-1}(x)$$

المحققة على دوال هرميت $h_k$ تظهر لنا العلاقة:

$$\mathcal{L}\Phi_{\mu,\vartheta} = (2|\vartheta| + n)\Phi_{\mu,\vartheta}$$

حيث $|\vartheta| = \sum_{j=1}^{n} \vartheta_j$ التي تعني أنّ $\Phi_{\mu,\vartheta}$ هي دوال ذاتية لـ $\mathcal{L}$ توافق القيمة الذاتية $2|\vartheta| + n$, وهي تشكل أيضاً جملة متعامدة في $L^2(\mathbb{C}^n)$. وهكذا لأجل كل $f \in L^2(\mathbb{C}^n)$ يصحُّ النشر: [2]

$$f = \sum_{\mu,\vartheta} \langle f, \Phi_{\mu,\vartheta}\rangle \Phi_{\mu,\vartheta}$$

ويمكن أن تتم كتابة النشر السابق بالشكل: $f = \sum_{k=0}^{\infty} P_k f$

حيث: $P_k f = \sum_{\mu,|\vartheta|=k} \langle f, \Phi_{\mu,\vartheta} \rangle \Phi_{\mu,\vartheta}$

وهو الإسقاط الطيفي الموافق للقيمة الذاتية $2k+n$.

- والآن من أجل أي $f \in L^2(\mathbb{C}^n)$ بحيث $\mathcal{L}f \in L^2(\mathbb{C}^n)$, فإنّه من خلال الترافق الذاتي لـ $\mathcal{L}$ نحصل على العلاقة:

$$P_k(\mathcal{L}f) = (2k+n)P_k f$$

وهذا ما يبيّن لنا أنّه لأجل $f \in L^2(\mathbb{C}^n)$ و $\mathcal{L}f \in L^2(\mathbb{C}^n)$ تتحقق العلاقة:

$$\mathcal{L}f = \sum_{k=0}^{\infty} (2k+n) P_k f$$

- سننظر الآن إلى مؤثر لابلاس الجزئي $\mathcal{L}$ على أنّه مؤثر خطي غير محدود من $L^2(\mathbb{H})$ في $L^2(\mathbb{H})$ مع مجال تعريف كثيف مُعطى في فضاء شوارتز $S(\mathbb{H})$.

**مبرهنة (3): [9]**

إنّ $\mathcal{L}$ هو مؤثر تناظري من $L^2(\mathbb{H})$ في $L^2(\mathbb{H})$ مع المجال الكثيف في $S(\mathbb{H})$, وفي الواقع هو مؤثر موجب أيضاً.

**ملاحظة(2):**

إنّ مؤثر لابلاس الجزئي $\mathcal{L}$ يكون قابلاً للإغلاق, ونرمز إلى غلافته بالرمز $\mathcal{L}_0$. وبالتالي فإنّ $\mathcal{L}_0$ هو مؤثر موجب, وتناظري, ومغلق من $L^2(\mathbb{H})$ في $L^2(\mathbb{H})$, وفي الحقيقة فإنّ $\mathcal{L}$ يملك تمديداً وحيداً مترافقاً ذاتياً هو $\mathcal{L}_0$.

## 3. الطيف: [9]_[7]

ليكن $A$ مؤثراً خطياً مغلقاً من فضاء باناخ العقدي $X$ إلى $X$ مع مجال كثيف $D(A)$, عندئذٍ يتم تحديد المجموعة الحلّالة لـ $A$ ( ويُرمز لها بالرمز $\rho(A)$ ) كمجموعة من الأعداد العقدية $\lambda$ بحيث يتحقق أنّ التطبيق:

$$A - \lambda \mathrm{I}: D(A) \to X$$

هو تقابل, حيث $\mathrm{I}$ هو المؤثر المطابق في $X$.

نرمز للطيف ب $\sum(A)$ و هو ببساطة المتمم لـ $\rho(A)$ في $\mathbb{C}$, أي $\sum(A) = \mathbb{C} \backslash \rho(A)$.

الطيف النقطي $\sum_P(A)$ لـ $A$ هو مجموعة الأعداد العقدية $\lambda$ بحيث يكون $(A - \lambda \mathrm{I})$ غير متباين.

الطيف المستمر $\sum_c(A)$ لـ $A$ هو مجموعة الأعداد العقدية $\lambda$ بحيث يكون المدى $R(A - \lambda \mathrm{I})$ لـ $(A - \lambda \mathrm{I})$ عبارة عن مجموعة كثيفة في $X$, و $(A - \lambda \mathrm{I})^{-1}$ موجود لكنه غير محدود.

الطيف المتبقي $\sum_r(A)$ لـ $A$ هو مجموعة الأعداد العقدية $\lambda$ بحيث $(A - \lambda \mathrm{I})^{-1}$موجود (قد يكون محدود أو غير محدود), لكن المدى $R(A - \lambda \mathrm{I})$ ليس مجموعة كثيفة في $X$.

بسهولة نلاحظ أنّ المجموعات $\sum_P(A)$ و $\sum_c(A)$ و $\sum_r(A)$ تكون منفصلة عن بعضها, ويكون:

$$\sum(A) = \sum_P(A) \cup \sum_c(A) \cup \sum_r(A)$$

علاوةً على ذلك, من المعروف أنّه إذا كان $A$ مؤثراً مترافقاً ذاتياً في فضاء هيلبرت العقدي الفصول, عندئذٍ: $\sum_r(A) = \phi$.

إنّ الوصف الدقيق لطيف مؤثر لابلاس الجزئي على زمرة هايزنبرغ يُعطى من خلال المبرهنة الآتية:

**مبرهنة (4): [9]**

تتحقق لدينا العلاقة الآتية:

$$\sum(\mathcal{L}_0) = \sum_c(\mathcal{L}_0) = [0, \infty)$$

**الإثبات:**

سنثبت أولاً أنّ $\mathcal{L}_0$ ليس له قيم ذاتية في $(0, \infty]$. و وفقاً لدراساتٍ سابقة تمّ الإثبات أنّ 0 ليس متجهاً ذاتياً لـ $\mathcal{L}_0$. والآن: ليكن $\lambda$ عدداً موجباً بحيث توجد دالة $u$ في $L^2(\mathbb{H})$ تحقق: $\mathcal{L}_0 u = \lambda u$

عندئذٍ تتحقق العلاقة: $\mathcal{L}_\tau u^\tau = \lambda u^\tau$

ولكن هذا يعني أنّ $u^\tau = 0$ لأجل كل $\tau \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, وبحيث يكون:

$$|\tau| \neq \lambda/(2k + 1) \ ; k = 0,1, ..$$

وهذا ما يؤدي إلى أنّ $u = 0$ وبالتالي نحصل على تناقض.

والآن بما أنّ $\mathcal{L}_0$ مترافق ذاتياً نحصل على العلاقة: $\sum(\mathcal{L}_0) = \sum_c(\mathcal{L}_0)$

لذلك يبقى إثبات أنّ $\mathcal{L}_0 - \lambda \mathrm{I}$ ليس غامراً لأجل كل $\lambda$ من $(0, \infty]$.

لنفرض أنّ $\mathcal{L}_0 - \lambda_0 \mathrm{I}$ غامر لبعض $\lambda_0$ من $(0, \infty]$, عندئذٍ ستكون $\lambda_0$ من المجموعة الحلّالة $\rho(\mathcal{L}_0)$ لـ $\mathcal{L}_0$ وبالتالي يوجد فترة مفتوحة $I_{\lambda_0}$ بحيث $\lambda_0 \in I_{\lambda_0}$ و $I_{\lambda_0} \subset \rho(\mathcal{L}_0)$.

لتكن $f$ دالة معرفة على $\mathbb{H}$ بالشكل: $f(x, y, t) = h(x, y) e^{-\frac{t^2}{2}} \quad ; x, y, t \in \mathbb{R}$

حيث $h$ هي دالة اختيارية من $L^2(\mathbb{R}^2)$. عندئذٍ لأجل كل $\lambda$ من $I_{\lambda_0}$ يمكن أن نجد دالة $u_\lambda$ من $L^2(\mathbb{H})$ بحيث يكون: $(\mathcal{L}_0 - \lambda \mathrm{I}) u_\lambda = f$

وبأخذ تحويل فورييه العكسي بالنسبة لـ $t$ نحصل على العلاقة:

$$(\mathcal{L}_\tau - \lambda \mathrm{I}) u_\lambda^\tau = h\, e^{-\frac{\tau^2}{2}} \text{ لكل } \tau \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

لذلك فإنّ $\mathcal{L}_\tau - \lambda \mathrm{I}$ يكون غامراً لكل $\tau$ من المجموعة $S_\lambda$ التي من أجلها يكون قياس ليبيغ $m(\mathbb{R} \setminus S_\lambda)$ لـ $\mathbb{R} \setminus S_\lambda$ هو صفر.

والآن لتكن $\tau \in \bigcap_{r \in \mathrm{I}_{\lambda_0} \cap \mathbb{Q}} S_\lambda$ حيث $\mathbb{Q}$ هي مجموعة الأعداد النسبية, عندئذٍ يتحقق أنّ $\mathcal{L}_\tau - \lambda \mathrm{I}$ غامر ومتباين لأجل كل $\lambda$ من $\mathrm{I}_{\lambda_0} \cap \mathbb{Q}$, وبالتالي $\mathcal{L}_\tau - \lambda \mathrm{I}$ هو تقابل لأجل كل $\lambda$ من $\mathrm{I}_{\lambda_0}$, وذلك من كون المجموعة الحلّالة لـ $\mathcal{L}_\tau$ هي مجموعة مفتوحة.

ومن جهة أخرى لدينا $\mathcal{L}_\tau - \lambda \mathrm{I}$ هو واحد لواحد إذا وفقط إذا تحقق أنّ:

$$\lambda \neq (2k + 1)|\tau| \ \ ; k = 0,1,2, ...$$

وهذا تناقض في حال اخترنا $\tau$ من $\bigcap_{r \in \mathrm{I}_{\lambda_0}} S_r$ ليكون عدداً صغيراً بما فيه الكفاية مثل $(2k + 1)|\tau| \in \mathrm{I}_{\lambda_0}$ لبعض $k$ حيث $k$ عدد صحيح غير سالب.

- كتطبيق للنظرية السابقة فإنّنا سنعطي أولاً مختلف الأطياف القياسية المفيدة التي ستلزمنا وذلك بعد التعريف الآتي:

**تعريف (8):[12]**

ليكن $X, Y$ فضاءا باناخ, وليكن $T: X \to Y$ مؤثراً خطيّاً محدوداً, ندعو $T$ بمؤثر فريدهولم (Fredholm) إذا تحققت الشروط الآتية:

1- $Ker(T)$ منتهية البعد.

2- $Ran(T)$ مغلقة.

3- $Coker(T)$ منتهية البعد, و هو رمز لمكمّل النواة.

- ليكن $A$ مؤثراً خطياً مغلقاً محدّداً بشكلٍ كثيف في فضاء باناخ العقدي $X$, إنّ الطيف القياسي $\sum_{DS}(A)$ لـ $A$ هو مجموعة كل الأعداد العقدية $\lambda$ بحيث يكون $R(A - \lambda \mathrm{I})$ غير مغلق في $X$.
- الآن لتكن $\phi_W(A)$ هي مجموعة جميع الأعداد العقدية $\lambda$ بحيث $A - \lambda \mathrm{I}$ هو مؤثر فريدهولم, ولتكن $\phi_S(A)$ هي مجموعة جميع الأعداد العقدية $\lambda$ بحيث يكون $A - \lambda \mathrm{I}$ هو مؤثر فريدهولم مع الدليل الصفري, عندئذٍ فإنّ الطيف القياسي $\sum_W(A)$ والطيف القياسي $\sum_S(A)$ لـ $A$ يعرفان بالشكل:

$$\sum_W(A) = \mathbb{C} \setminus \phi_W(A)$$
$$\sum_S(A) = \mathbb{C} \setminus \phi_S(A)$$

وبسهولة تتضح العلاقة الآتية: $\sum_{DS}(A) \subseteq \sum_W(A) \subseteq \sum_S(A)$ .

- وفي حالة مؤثر لابلاس الجزئي على زمرة هايزنبرغ نتوصل إلى المبرهنة الآتية:

**مبرهنة (5): [9]**

تتحقق لدينا المساواة الآتية: $$\sum_{DS}(\mathcal{L}_0) = \sum_W(\mathcal{L}_0) = [0, \infty)$$

**الإثبات:**

يكفي أن نثبت أنّ العلاقة الآتية محققة: $[0, \infty) \subseteq \sum_{DS}(\mathcal{L}_0)$

لنفرض أنّ $\lambda \in [0, \infty)$ ليست من $\sum_{DS}(\mathcal{L}_0)$, عندئذٍ فإنّ المدى $R(\mathcal{L}_0 - \lambda \mathrm{I})$ لـ $\mathcal{L}_0 - \lambda \mathrm{I}$ يكون مغلقا في $L^2(\mathbb{H})$, وبحسب المبرهنة لدينا $\lambda \in \sum_c(\mathcal{L}_0)$, وبالتالي $R(\mathcal{L}_0 - \lambda \mathrm{I})$ كثيفة في $L^2(\mathbb{H})$, لذلك فإنّ $\mathcal{L}_0 - \lambda \mathrm{I}$ يكون تقابلا, أي إنّ $\lambda \in \rho(\mathcal{L}_0)$, وهذا تناقض.

## الخلاصة:

وبذلك نكون قد درسنا النظرية الطيفية لمؤثر لابلاس على زمرة هايزنبرغ, و اعتمدنا على ما توصلنا إليه في دراستنا للطيف لهذا المؤثر.

**التوصيات:** يمكننا استخدام التقنية التي اعتمدناها في هذا البحث لحساب طيف التمديد الوحيد المترافق ذاتيا $\Delta_{\mathbb{H},0}$ من مؤثر لابلاس الجزئي $\Delta_{\mathbb{H}}$ على زمرة هايزنبرغ المعطى بالشكل:

$$\Delta_{\mathbb{H}} = -(X^2 + Y^2 + T^2)$$

حيث يكون: $$\sum(\Delta_{\mathbb{H}}, 0) = \sum_c(\Delta_{\mathbb{H},0}) = [0, \infty)$$

وعلاوة على ذلك فإن العلاقة الآتية محققة:

$$\sum_{DS}(\Delta_{\mathbb{H},0}) = \sum_{W}(\Delta_{\mathbb{H},0}) = \sum_{S}(\Delta_{\mathbb{H},0}) = [0,\infty)$$

## المراجع:


1- سهى سلامة.: " دراسة في زمر لي و أهم الأمثلة عنها (زمرة هايزنبرغ) ". المجلة العربية للعلوم و نشر الأبحاث,10.26389/AJSRP.S191019, (2020).

2- سهى سلامة.: " دوال هرميت و دوال هرميت الخاصة اعتماداً على زمرة هايزنبرغ ". المجلة العربية للعلوم و نشر الأبحاث,10.26389/AJSRP.S201019, (2020).

3- سهى سلامة.: "دور زمرة هايزنبرغ في التحليل التوافقي". المجلة العربية للعلوم و نشر الأبحاث,10.26389/AJSRP.S010719, (2019).

4- سهى سلامة.: " مبرهنات بالي_ وينر لتحويل فوربيه اعتماداً على زمرة هايزنبرغ ". المجلة العربية للعلوم و نشر الأبحاث,10.26389/AJSRP.S211019, (2020).

5- Celebi, R., Hendricks, K. and Jordan, M.: "The Heisenberg group and uncertainty principle in Mathematical physics". Research program under the supervision of Dr. Hadi Salamasian, university of Ottawa, (2015).

6- Krantz, S.:"Explorations In Harmonic Analysis With Applications To Complex Function Theory And The Heisenberg Group ", Bickhäuser Boston Inc, Boston, Ma, 245-260,292-295, (2009).

7- Thangavelu, S.: "Harmonic analysis on the Heisenberg group". Progress in Mathematics 159, Birkhäuser, Boston, MA, (1998).

8- Egwe, M.:"On Some Properties Of The Heisenberg Laplacian ",Advances In Pure Mathematics,2,354-357, (2012).

9- A. Dasgupta, A., Nolahajloo, S and Wong, M.:"The Sub-Laplacian On The Heisenberg Group", Tohoku Math.J.63,269-276, (2011).

10- HÖrmander, L.:" Hypoellptic Second Order Differential Equations ",Acta Math.119,147-171, (1967).

11- Ratnakumar, P.K.: "On SchrÖdinger Propagator For The Special Hermite Operator ",Birkhäuser Boston,J Fourier Anal Appl 14,286-300, (2008).

12- Din, A.:" Compact Operators and Fredholm Operator",Sun Yat-Sen University, chapter3,22-25, (2016).