Arab Journal of Sciences and Research Publishing
Volume (8), Issue (2) : 30 Jun 2022
P: 109 - 119

AJSRP
ISSN: 2518-5780

المجلة العربية للعلوم ونشــر الأبحـاث
المجلد (8)، العدد (2) : 30 يونيو 2022 م
ص: 109 - 119

# Approximation of functions in Lipschitz class with Muckenhoupt Weights $Lip\ (\alpha, p, w)$ Using Matrix Operator

**Omar Mahmoud Nattouf**

**Mohammad Mahmoud Amer**

Faculty of Science || Al-Baath University || Syria

**Abstract:** Let $f$ be a function where $f \in L^p[0,2\pi]$ and $p \geq 1$ , and assume it to be a periodic function with $(2\pi)$ period, and let the partial arithmetic sequence for Fourier Series $s_n$ for this function to be given as follow:

$$s_n(f;x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \ (a_k \cos{(nx)}\ + b_k \sin{(nx)}\,) = \sum_{k=0}^{n} \ u_k(f;x)$$

In this research, we will get to know about the functions in the class $Lip\ (\alpha, p, w)$ and then we will approximate these functions to a degree

$O((n+1)^{-\alpha})$, by using a by using $t_n^A$ matrix operator and apply it on general term for partial arithmetic sequence Fourier series

**Keywords:** Functions in Lipschitz class with Muckenhoupt Weights, Matrix Operator Fourier Series, Degree of Approximation.

# تقريب دوال صف ليبشتز بوزن ماكنهوبت $\mathbf{Lip\ (\alpha, p, w)}$ باستخدام المؤثر المصفوفي

**عمر محمود نتّوف**

**محمد محمود عامر**

كلية العلوم || جامعة البعث || سوريا

**المستخلص:** لتكن $f \in L^p[0,2\pi]$ حيث $p \geq 1$ ولتكن هذه الدالة دورية دورها $2\pi$ ولتكن متتالية المجاميع الجزئية لمتسلسلة فوريه لهذه الدالة معطاة بالشكل:

$$s_n(f;x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \ (a_k \cos{(nx)}\ + b_k \sin{(nx)}\,) = \sum_{k=0}^{n} \ u_k(f;x)$$

حيث إننا في هذا البحث سوف نتعرف على دوال الصف $Lip\ (\alpha, p, w)$ ثم نقوم بتقريب هذه الدوال إلى الدرجة $O((n+1)^{-\alpha})$ وذلك باستخدام المؤثر المصفوفي $t_n^A$ وتطبيقه على الحد العام لمتتالية المجاميع الجزئية لمتسلسلة فوريه

**الكلمات المفتاحية:** دوال صف ليبشتز بوزن ماكنهوبت، المؤثر المصفوفي، متسلسلة فوريه، درجة التقريب

## 1- المقدمة.

تعد نظرية التقريب واحدة من أهم فروع الرياضيات وقد تطورت بشكل كبير في الآونة الأخيرة ودخلت في مجالات مختلفة كالعلوم الفيزيائية والهندسية.

ويعتبر تقريب دوال صف ليبشتز من أهم الأمور في نظرية التقريب حيث إننا سوف نقوم باستخدام المؤثرات الخطية وتطبيقها على الحد العام لمتتالية المجاميع لمتسلسلة فوريه والتي تنتقل بدورها إلى متتاليات أخرى تقريب باستخدام النظائم في صفوف ليبشتز إلى الدوال نفسها وبدرجات تقريب مختلفة وذلك بغية الحصول على درجة التقريب المنشودة

**مشكلة البحث:**

إيجاد درجة تقريب دوال صف ليبشتز بوزن ماكنهوبت $\mathrm{Lip}\ (\alpha, p, w)$ وذلك باستخدام وسائط المؤثر المصفوفي $t_n^A$ والذي يتم تطبيقه على متتالية المجاميع الجزئية لمتسلسلة فوريه حيث إن أغلب الدراسات السابقة كانت تتم على صفوف ليبشتز البسيطة

## 2- مواد البحث وطرائقه.

**تعريف $(1)$ المؤثر المصفوفي : $(\boldsymbol{Matrix\ \ Operator})[1]$**

لتكن لدينا المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ ولتكن $\{S_n\}$ متتالية مجاميعها الجزئية، عندئذٍ نعرف المؤثر المصفوفي $(A)$بالشكل الآتي:

$$t_n^A = \sum_{k=0}^{n} a_{n,k}\, S_k = \sum_{k=0}^{n} a_{n,n-k}\, S_{n-k} \qquad ; \quad S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$$

والمصفوفة $A = \left(a_{n.k}\right)$هي مصفوفة مثلثية سفلى لا نهائية من الثوابت الحقيقية.

وسنعتبر في هذا البحث أن المصفوفة $A = \left(a_{n,k}\right)$ نظامية أي أنها تحقق الشروط الآتية:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} a_{n,k} = 1 \quad , \quad \lim_{n\to\infty} a_{n,k} = 0 \quad ; k = 1,2, \ldots$$

$$\sum_{k=0}^{n} \left|a_{n,k}\right| \le M \ ; \ \ n = 1,2, \ldots$$ (حيث إن $M$ ثابت لا يتعلق بـ $n$ )

حيث نقول عن مؤثر إنه نظامي إذا أدى تطبيقه على متسلسلة متقاربة إلى المجموع المعتاد لهذه المتسلسلة.

**تعريف $(2)$ صف ليبشتز الموزون $\boldsymbol{Lip\ (\alpha, p, w)}$: $[2]$**

$$\boldsymbol{Lip\ (\alpha, p, w)} = \left\{f \in L_w^p \ : \ \Omega(f, .)_{p,w} = O(\delta^{\alpha}), \delta > 0\right\}$$

وبوضع $w(x) = 1\ \forall x \in [0,2\pi]$ فإن صف ليبشتز الموزون $\boldsymbol{Lip\ (\alpha, p, w)}$، يؤول إلى صف ليبشتز المعروف $\boldsymbol{Lip\ (\alpha, p)}$..

**تعريف دالة الوزن$(3)$:$[2]$**

لتكن $w$ دالة دورية دورها $2\pi$ ولتكن: $w: [0,2\pi] \to [0, \infty]$ نقول عن $w$ إنها دالة وزن إذا كان قياس المجموعة $w^{-1}(\{0, \infty\})$ معدوماً وفق ليبيغ.

**تعريف(4): [2]**

نقول إن الدالة $f \in L_w^p\ [0,2\pi]$ أو $f \in L_w^p$ أي $f$ تنتمي إلى فضاء ليبيغ الموزون لكل الدوال القيوسة والدورية والتي دور كل منها $2\pi$، إذا تحقق الشرط:

$$\|f\|_{p,w} = \left(\int_0^{2\pi} |f(x)|^p w(x)\, dx\right)^{\frac{1}{p}} < \infty\ ;\ 1 \le p < \infty$$

**تعريف(5):[2]** لتكن $1 < p < \infty$، تكون دالة الوزن $w$ من صف ماكنهوبت (Muckenhoupt) $A_p$ إذا تحقق الشرط:

$$\sup_I \left(\frac{1}{|I|}\int_I\ w(x)dx\right)\left(\frac{1}{|I|}\int_I\ \{w(x)\}^{-\frac{1}{(p-1)}}dx\right)^{p-1} < \infty$$

حيث إن: الحد الأعلى الأصغري مأخوذ على كل مجال $I$ طوله أصغر أو يساوي $2\pi$ أي يحقق: $|I| \le 2\pi$.

تعريف **(6):[2]**

نسمي المتتالية غير السالبة $r = (r)_{m=0}^{\infty}$ متناقصة تماماً باطراد تقريباً ونرمز لها بالرمز AMDS

أو نسميها متزايدة تماماً باطراد تقريباً ونرمز لها بالرمز AMIS إذا وجد ثابت $K = K(r)$ متعلق بالمتتالية $r$ فقط من أجل كل $m \ge \mu$ أن: $r_m \le K r_\mu$ أو $K r_m \ge r_\mu$

**تعريف (7)معامل الاستمرار: [2]**

لتكن $w \in A_p$ و $f \in L_w^p$ يعرف معامل استمرار الدالة $f$ بالشكل:

$$\Omega(f,\delta)_{p,w} = \sup_{|h|\le\delta} \|\Delta_h(f)\|_{p,w}\ ;\ \delta > 0$$

حيث إن:

$$\Delta_h(f)(x) = \frac{1}{h}\int_0^h |f(x+t) - f(x)|dx$$

إن معامل الاستمرار $\Omega(f,\delta)_{p,w}$ هو عبارة عن دالة مستمرة متزايدة وغير سالبة وتحقق:

$$\lim_{\delta\to 0} \Omega(f,\delta)_{p,w} = 0$$

$$\Omega(f_1 + f_2, .)_{p,w} \le \Omega(f_1, .)_{p,w} + \Omega(f_2, .)_{p,w}$$

كما أن معامل الاستمرار $\Omega(f,.)_{p,w}$ المعرف بهذا الشكل، يتم في الفضاء $L_w^p$ اللامتغير بشكل عام وذلك اعتماداً على التحويل المعروف: $f(x) \to f(x+h)$.

حالة خاصة: إذا وضعنا $w(x) \equiv 1$ فإن معامل الاستمرار $\Omega(f,.)_{p,w}$ ومعامل الاستمرار المعروف $w_p(f,.)$ متكافئان.

**تعريف(8): [3]**

**يمكننا أنْ نعرف $(\boldsymbol{Big-Oh})$ $\left(\boldsymbol{O}\ \text{_الكبيرة}\right)$و$\left(\boldsymbol{o}-\text{الصغيرة}\right)$ $(\boldsymbol{Little-Oh})$ كما يلي:**

1. لتكن $u_n\,, v_n$ متتاليتين عدديتين , عندئذٍ :

$$\lim_{n\to\infty}\frac{v_n}{u_n}=0 \ \Leftrightarrow \quad v_n=o(u_n)$$

$$\text{محدودة}\left(\frac{v_n}{u_n}\right)_{n\geq 0}\ \text{المتتالية}\ \Leftrightarrow v_n=O(u_n)$$

2. لتكن لدينا الدالة $f:X\longrightarrow Y$،حيث إنَّ $Y,X$ مجموعتان من الأعداد الحقيقية , عندئذٍ يكون:

$$O(f)=\{g:X\longrightarrow Y\ ;\ \exists\ x_0\,,c>0\ ;\forall\ x\geq\ x_0\Longrightarrow cf(x)\ \geq g(x)\geq 0\}$$

ونكتب $g=O(f)$ أو $g\ \in O(f)$

$$o(f)=\{\ g:X\to Y;\forall c>0,\exists x_0>0\ ;\ \forall\ x>x_0\Longrightarrow cf(x)\ >g(x)\geq 0\ \}$$

ونكتب $g=o(f)$ أو $g\ \in o(f)$

**تعريف $(9)$درجة تقريب دوال صفوف ليبشتز:$[4]$**

تعطى درجة تقريب دوال صفوف ليبشتز حيث $\{\boldsymbol{f}\in \boldsymbol{L^p}\ ,\boldsymbol{p}\geq \boldsymbol{1}\}$ بالعلاقة:

$$\boldsymbol{E_n(f)}=\min_{\boldsymbol{t_n}}\|\boldsymbol{f(x)}-\boldsymbol{t_n(f;x)}\|_{\boldsymbol{p}}$$

حيث إن $\boldsymbol{t_n(f;x)}$ تمثل تحويل المؤثر المدروس والمطبق على الحد العام لمتتالية المجاميع الجزئية لمتسلسلة فورييه للدالة $\boldsymbol{f}$، **وتسمى درجة التقريب هنا بتقريبات فورييه المثلثية.**

وتعطى درجة تقريب دوال صفوف ليبشتز حيث $\{\boldsymbol{f}\in \boldsymbol{L^\infty}\ \}$ بالعلاقة:

$$\|\boldsymbol{t_n}-\boldsymbol{f}\|_\infty=\sup_{x\in\mathbb{R}}\ \{|\boldsymbol{t_n(x)}-\boldsymbol{f(x)}|\}$$

## 3- النتائج ومناقشتها.

ليكن $A\equiv(a_{n,k})$ مؤثر خطي مُمثَّل بمصفوفة نظامية مثلثية سفلى ذو تأثيرات غير سالبة.

يؤثر على $s_n(f;x)$ بالشكل:

$$t_n^A(f;x)=\sum_{k=0}^{n}a_{n,k}s_n(f;x)$$

ولنعرِّف مؤثر الفروق الأمامية بالشكل:

$$\Delta_k a_{n,k}=a_{n,k}-a_{n,k+1}$$

**مبرهنة (1):**

لتكن $f\in\ \boldsymbol{Lip}\ (\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{p},\boldsymbol{w})$ حيث إن: $\boldsymbol{p}>1$ و $\boldsymbol{w}\in \boldsymbol{A_p}$ ولتكن $A\equiv(a_{n,k})$ مصفوفة لا نهائية مثلثية سفلى نظامية، عندئذٍ تعطى درجة تقريب الدالة $f$بالعلاقة الآتية:

$$\|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})-t_n^A(f;x)\|_{\boldsymbol{p},\boldsymbol{w}}=O((n+1)^{-\alpha})\ ,n=0,1,2,\ldots$$

وذلك إذا تحقق أحد الشروط الآتية:

*i.* $1>\alpha>0$ و $\boldsymbol{AMIS}\ni\{a_{n,k}\}$ بالنسبة إلى $k$

*ii.* $1>\alpha>0$ و $\boldsymbol{AMDS}\ni\{a_{n,k}\}$ بالنسبة إلى $k$ وبحيث يكون:

$$(\boldsymbol{n}+\boldsymbol{1})\boldsymbol{a}_{\boldsymbol{n},\boldsymbol{0}}=\boldsymbol{O}(\boldsymbol{1}).$$

*iii.* $\alpha=1$ و $\sum_{\boldsymbol{k}=\boldsymbol{0}}^{\boldsymbol{n}-\boldsymbol{1}}(\boldsymbol{n}-\boldsymbol{k})\left|\Delta_{\boldsymbol{k}}a_{n,k}\right|=\boldsymbol{O}(\boldsymbol{1})$.

*iv.* $\alpha=1$ و $\sum_{\boldsymbol{k}=\boldsymbol{0}}^{\boldsymbol{n}}\left|\Delta_{\boldsymbol{k}}a_{n,k}\right|=\boldsymbol{O}(\boldsymbol{a}_{\boldsymbol{n},\boldsymbol{0}})$ وبحيث يكون:

$$(\boldsymbol{n}+\boldsymbol{1})\boldsymbol{a}_{\boldsymbol{n},\boldsymbol{0}}=\boldsymbol{O}(\boldsymbol{1}).$$

*v.* $1\geq\alpha>0$ و $\sum_{\boldsymbol{k}=\boldsymbol{0}}^{\boldsymbol{n}-\boldsymbol{1}}\left|\Delta_{\boldsymbol{k}}\left(\frac{A_{n,0}-A_{n,k+1}}{k+1}\right)\right|=\boldsymbol{O}\left(\frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{n}+\boldsymbol{1}}\right)$

نعرض الإثبات بعد التمهيديات الآتية حيث نعتمد عليها في إثبات المبرهنة السابقة:

**تمهيدية (1):**[2]

لتكن $1\geq\alpha>0$ و $\infty>p>1$، $w\in A_p$ عندئذٍ التقدير:

$$\|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{s}_{\boldsymbol{n}}(\boldsymbol{f};\boldsymbol{x})\|_{\boldsymbol{p},\boldsymbol{w}}=O((n+1)^{-\alpha})\ ;n=0,1,2,3,\ldots$$

محقق من أجل أي $f\in\ \boldsymbol{Lip}\ (\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{p},\boldsymbol{w})$.

**تمهيدية (2):** [2]

لتكن $\infty>p>1$، $w\in A_p$ عندئذٍ من أجل $f\in\ \boldsymbol{Lip}\ (\boldsymbol{1},\boldsymbol{p},\boldsymbol{w})$ يكون التقدير:

$$\|\boldsymbol{s}_{\boldsymbol{n}}(\boldsymbol{f};\boldsymbol{x})-\boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{n}}(\boldsymbol{f};\boldsymbol{x})\|_{\boldsymbol{p},\boldsymbol{w}}=O((n+1)^{-1})\ ;n=0,1,2,3,\ldots$$

محقق.

**تمهيدية (3):**

سواء كانت $\boldsymbol{AMIS}\ni\{a_{n,k}\}$ (متزايدة تماماً تقريباً) أو $\boldsymbol{AMDS}\ni\{a_{n,k}\}$ (متناقصة تماماً تقريباً)،

على أن يتحقق:

$$(n+1)a_{n,0}=O(1)$$

عندئذٍ لأجل: $1>\alpha>0$ يكون:

$$\sum_{\boldsymbol{k}=\boldsymbol{0}}^{\boldsymbol{n}}(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{1})^{-\boldsymbol{\alpha}}a_{n,k}=O((n+1)^{-\alpha})$$

**إثبات التمهيدية (3):** لتكن $r = \left[\frac{n}{2}\right]$ و $\{a_{n,k}\} \in \boldsymbol{AMIS}$ عندئذٍ:

$$\sum_{k=0}^{n}(k+1)^{-\alpha}a_{n,k} = \sum_{k=0}^{r}(k+1)^{-\alpha}a_{n,k} + \sum_{k=r+1}^{n}(k+1)^{-\alpha}a_{n,k}$$

$$\leq Ka_{n,r}\sum_{k=0}^{r}(k+1)^{-\alpha} + (r+1)^{-\alpha}\sum_{k=r+1}^{n}a_{n,k}$$

$$\leq Ka_{n,r}(r+1)^{1-\alpha} + (r+1)^{-\alpha}\sum_{k=0}^{n}a_{n,k}$$

$$\leq K(r+1)^{-\alpha}(r+1)a_{n,r} + (r+1)^{-\alpha}A_{n,0} = O((r+1)^{-\alpha})$$

$$= O((n+1)^{-\alpha})$$

حيث إن:

$$(r+1)a_{n,r} \leq (n-r+1)a_{n,r} \leq K\left(a_{n,r} + a_{n,r+1} + \cdots + a_{n,n}\right)$$

كما أن: $(r+1)^{-\alpha} = O((n+1)^{-\alpha})$.

وإذا كان $\{a_{n,k}\} \in \boldsymbol{AMDS}$ و $(n+1)a_{n,0} = O(1)$ عندئذٍ:

$$\sum_{k=0}^{n}(k+1)^{-\alpha}a_{n,k} \leq Ka_{n,0}\sum_{k=0}^{n}(k+1)^{-\alpha} = O((n+1)^{-\alpha})$$

## 4- المناقشة.

**إثبات المبرهنة (1):**

سوف نثبت الحالتين (i) و (ii) معاً باستخدام التمهيديتين (1) و (3):

من المعلوم أن:

$$t_n^A(f;x) - f(x) = \sum_{k=0}^{n}a_{n,k}\{s_k(f;x) - f(x)\}$$

وبالتالي: $\|t_n^A(f;x) - f(x)\|_{p,w} \leq \sum_{k=0}^{n}a_{n,k}\|s_k(f;x) - f(x)\|_{p,w} =$
$\sum_{k=0}^{n}a_{n,k}O(k+1)^{-\alpha} = O((n+1)^{-\alpha})\ , n = 0,1,2,\ldots$

الحالة (iv):

باستخدام تحويل آبل و $a_{n,n+1} = 0$ يكون لدينا:

$$t_n^A(f;x) = \sum_{k=0}^{n}a_{n,k}s_k(f;x) = \sum_{k=0}^{n}a_{n,k}\sum_{i=0}^{k}u_i(f;x) = \sum_{k=0}^{n}A_{n,k}u_k(f;x)$$

وبالتالي:

$$s_n(f;x) - t_n^A(f;x) = \sum_{k=0}^{n} \left(1 - A_{n,k}\right) u_k(f;x)$$
$$= \sum_{k=1}^{n} k^{-1}\left(A_{n,0} - A_{n,k}\right) k u_k(f;x)$$

وباستخدام تحويل آبل مرة أخرى و $A_{n,n+1} = 0$ يكون لدينا:

$$s_n(f;x) - t_n^A(f;x)$$
$$= \sum_{k=1}^{n} \left\{\Delta_k k^{-1}\left(A_{n,0} - A_{n,k}\right)\right\} \sum_{i=1}^{k} i u_i(f;x)$$
$$+ (n+1)^{-1} \sum_{k=1}^{n} k u_k(f;x)$$

لهذا فإن:

$$\|s_n(f;x) - t_n^A(f;x)\|_{p,w}$$
$$\leq \sum_{k=1}^{n} \left|\Delta_k k^{-1}\left(A_{n,0} - A_{n,k}\right)\right| \left\|\sum_{i=1}^{k} i u_i(f;x)\right\|_{p,w}$$
$$+ (n+1)^{-1} \left\|\sum_{k=1}^{n} k u_k(f;x)\right\|_{p,w} \dots (1)$$

أيضاً:

$$s_n(f;x) - \sigma_n(f;x) = (n+1)^{-1} \sum_{k=0}^{n} \{(n+1) u_k(f;x) - s_k(f;x)\}$$
$$= (n+1)^{-1} \sum_{k=1}^{n} k u_k(f;x)$$

مما يؤدي إلى أن:

$$\left\|\sum_{k=1}^{n} k u_k(f;x)\right\|_{p,w} = (n+1)\|\sigma_n(f;x) - s_n(f;x)\|_{p,w} = O(1) \dots (\mathbf{2})$$

وذلك استناداً إلى التمهيدية (2).

وباستخدام (1) و (2) نجد أن:

$$\|s_n(f;x) - t_n^A(f;x)\|_{p,w} \leq \sum_{k=1}^{n} \left|\Delta_k k^{-1}\left(A_{n,0} - A_{n,k}\right)\right| + (n+1)^{-1} \dots (3)$$

الآن:

$$\Delta_k k^{-1}\left(A_{n,0}-A_{n,k}\right)=\frac{A_{n,0}-A_{n,k}}{k}-\frac{A_{n,0}-A_{n,k+1}}{k+1}$$
$$=k^{-1}(k+1)^{-1}\left(A_{n,0}-A_{n,k}-ka_{n,k}\right)=$$
$$=k^{-1}(k+1)^{-1}\left(\sum_{i=0}^{k-1}a_{n,i}-ka_{n,k}\right)\dots(4)$$

ولنتحقق من صحة العلاقة الآتية بالاستقراء الرياضي:

$$\left|\sum_{i=0}^{k-1}a_{n,i}-ka_{n,k}\right|\leq\sum_{i=1}^{k}i\left|a_{n,i-1}-a_{n,i}\right|\dots(5)$$

من أجل $k=1$، لدينا:

$$\left|\sum_{i=0}^{k-1}a_{n,i}-ka_{n,k}\right|=\left|a_{n,0}-a_{n,1}\right|=1.\left|a_{n,0}-a_{n,1}\right|$$

فالعلاقة (5) صحيحة من أجل $k=1$.

لنفرض صحة العلاقة (5) من أجل $k=m$، عندئذٍ من أجل $k=m+1$ يكون:

$$\left|\sum_{i=0}^{m}a_{n,i}-(m+1)a_{n,m+1}\right|$$
$$=\left|\sum_{i=0}^{m-1}a_{n,i}+a_{n,m}+ma_{n,m}-ma_{n,m}-(m+1)a_{n,m+1}\right|$$
$$\leq\left|\sum_{i=0}^{m-1}a_{n,i}-ma_{n,m}\right|+(m+1)\left|a_{n,m}-a_{n,m+1}\right|$$
$$\leq\sum_{i=1}^{m}i\left|a_{n,i-1}-a_{n,i}\right|+(m+1)\left|a_{n,m}-a_{n,m+1}\right|$$
$$=\sum_{i=1}^{m+1}i\left|a_{n,i-1}-a_{n,i}\right|$$

فالعلاقة (5) صحيحة من أجل $k=m+1$.

وبالتالي العلاقة (5) صحيحة من أجل $1\leq k\leq n$.

باستخدام العلاقتين (4) و (5) نجد أن:

$$\sum_{k=1}^{n}\left|\Delta_k k^{-1}\left(A_{n,0}-A_{n,k}\right)\right|\leq$$

$$\leq \sum_{k=1}^{n} k^{-1}(k+1)^{-1} \sum_{i=1}^{k} i\left|a_{n,i-1} - a_{n,i}\right| \leq \sum_{i=1}^{n} i\left|a_{n,i-1} - a_{n,i}\right| \sum_{k=i}^{\infty} k^{-1}(k+1)^{-1}$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\left|a_{n,i-1} - a_{n,i}\right| = \sum_{k=0}^{n-1}\left|\Delta_k a_{n,n-k}\right| = O\left(a_{n,0}\right)$$

$$= O\left((n+1)^{-1}\right) \ldots (\mathbf{6})$$

بجمع (3) و (6) نحصل على:

$$\left\|s_n(f;x) - t_n^A(f;x)\right\|_{p,w} = O\left((n+1)^{-1}\right) \ldots (\mathbf{7})$$

وباستخدام التمهيدية (1) والعلاقة (7) نحصل على:

$$\left\|f(x) - t_n^A(f;x)\right\|_{p,w} \leq \left\|f(x) - s_n(f;x)\right\|_{p,w} + \left\|s_n(f;x) - t_n^A(f;x)\right\|_{p,w} =$$
$$= O\left((n+1)^{-1}\right)$$

وبهذا الشكل يكتمل إثبات الحالة (iv).

ولإثبات الحالة (iii) نتحقق أولاً من الشرط:

$$\sum_{k=0}^{n-1}(n-k)\left|\Delta_k a_{n,k}\right| = O(1)$$

يعني ذلك أن نتحقق من الشرط:

$$\sum_{k=1}^{n}\left|\Delta_k k^{-1}\left(A_{n,0} - A_{n,k}\right)\right| = O\left((n+1)^{-1}\right) \ldots (8)$$

من العلاقة (4) نستطيع أن نكتب:

$$\sum_{k=1}^{n}\left|\Delta_k k^{-1}\left(A_{n,0} - A_{n,k}\right)\right| \leq \sum_{k=1}^{n} k^{-1}(k+1)^{-1} \sum_{i=1}^{k} i\left|a_{n,i-1} - a_{n,i}\right|$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \Delta\left(k^{-1}\right) \sum_{i=1}^{k} i\left|a_{n,i-1} - a_{n,i}\right|$$

وباستخدام تحويل آبل يكون:

$$\sum_{k=1}^{n}\left|\Delta_k k^{-1}\left(A_{n,0}-A_{n,k}\right)\right| \leq \sum_{k=1}^{n+1} k^{-1}k\left|a_{n,k-1}-a_{n,k}\right|$$

$$-\frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n+1} k\left|a_{n,k-1}-a_{n,k}\right| = \sum_{k=1}^{n+1}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{n+1}\right)k\left|a_{n,k-1}-a_{n,k}\right|$$

$$=\sum_{k=1}^{n+1}\left(\frac{n-k+1}{n+1}\right)\left|a_{n,k-1}-a_{n,k}\right| = \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{n-k}{n+1}\right)\left|a_{n,k+1}-a_{n,k}\right|$$

$$=\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n-1}(n-k)\left|\Delta_k a_{n,k}\right| = O((n+1)^{-1})$$

وبالتالي تم التحقق من (8).

بجمع العلاقتين (3) و (8) وبالاعتماد على التمهيدية (2) نحصل على:

$$\|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})-t_n^A(f;x)\|_{\boldsymbol{p},\boldsymbol{w}} = O((n+1)^{-1})$$

الحالة (v): بالاعتماد على التمهيدية (1) وباستخدام تحويل آبل نجد:

$$\|t_n^A(f;x)-f(x)\|_{p,w} \leq \sum_{k=0}^{n} a_{n,k}\|s_k(f;x)-f(x)\|_{p,w}$$

$$= O\left\{\sum_{k=0}^{n}(k+1)^{-\alpha}a_{n,k}\right\}$$

$$= O\left\{\sum_{k=0}^{n-1}\Delta_k(k+1)^{-\alpha}\left(\sum_{i=0}^{k}a_{n,i}\right)+(n+1)^{-\alpha}\sum_{i=0}^{n}a_{n,i}\right\}$$

$$= O\left\{\sum_{k=0}^{n-1}\left(A_{n,0}-A_{n,k+1}\right)\{(k+1)^{-\alpha}-(k+2)^{-\alpha}\}+(n+1)^{-\alpha}A_{n,0}\right\}$$

$$= O\left\{\sum_{k=0}^{n}(k+1)^{-\alpha}\frac{\left(A_{n,0}-A_{n,k+1}\right)}{k+1}\right\}+O(n+1)^{-\alpha} \ldots (9)$$

وباستخدام تحويل آبل مرة أخرى:

$$\sum_{k=0}^{n}(k+1)^{-\alpha}\frac{\left(A_{n,0}-A_{n,k+1}\right)}{k+1} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1}\Delta_k\left\{\frac{A_{n,0}-A_{n,k+1}}{k+1}\right\}\sum_{i=0}^{k}(i+1)^{-\alpha}+\frac{A_{n,0}-A_{n,n+1}}{n+1}\sum_{i=0}^{n}(i+1)^{-\alpha}$$

$$\leq \sum_{k=0}^{n-1}\Delta_k\left\{\frac{A_{n,0}-A_{n,k+1}}{k+1}\right\}(k+1)^{1-\alpha}+\frac{(n+1)^{1-\alpha}}{n+1}$$

$$\leq (n+1)^{1-\alpha}\sum_{k=0}^{n-1}\Delta_k\left\{\frac{A_{n,0}-A_{n,k+1}}{k+1}\right\}+(n+1)^{-\alpha}=O((n+1)^{-\alpha})\ldots(\mathbf{10})$$

وذلك اعتماداً على الشرط (v)، وحيث $A_{n,n+1}=0$.

بجمع العلاقتين (9) و(10) نحصل على:

$$\|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})-t_n^A(f;x)\|_{\boldsymbol{p},\boldsymbol{w}}=O((n+1)^{-\alpha})\,,n=0,1,2,\ldots$$

وبهذا الشكل يكون إثبات المبرهنة قد اكتمل.

**الخلاصة:**

في هذا البحث قمنا بدراسة تقريب دوال صف ليبشتز بوزن ماكنهوبت وتوصلنا إلى درجة تقريب هذه الدوال وذلك باستخدام المؤثر المصفوفي.

## التوصيات.

يمكننا دراسة تقريب دوال صفوف ليبشتز وصفوف زيغموند بمختلف أنواعها وذلك باستخدام المؤثرات الخطية المختلفة أيضاً كمؤثر أولر ومؤثر نيورلند ومؤثر نيولند المعمم ومؤثر سيزارو وغيرها من المؤثرات الخطية.

## قائمة المراجع.


1. Alotaibi, M. Mursaleen, 2013 " Applications of Hankel and Regular Matrices in Fourier series ", (1-3).
2. Rosenberg, 2007,10, " Asymptotic order Notation", (1-6)
3. U. Singh, S. K. Srivastava, 2013, " Degree of Approximation of functions in Lipschitz class with Muckenhoupt Weights by Matrix Means ", *International Journal of Applied Mathematics*, 43, 4, (1041-1047).
4. V. N. Mishra, K. Khatri, Using linear operators to approximate signals of $\boldsymbol{Lip}\ (\boldsymbol{\xi}(\boldsymbol{t}),\boldsymbol{p})\ ;\ (\boldsymbol{p}\ \geq \mathbf{1})$-class, 353-363, 2013.