Journal of Nature, Life and Applied Sciences
Volume (3), Issue (3) : 30 Sep 2019
P: 85 - 93
ISSN: 2522-3356
مجلة العلوم الطبيعية والحياتية والتطبيقية
المجلد (3)، العدد (3) : 30 سبتمبر 2019 م
ص: 85 - 93

# The role of Heisenberg group in Harmonic analysis

**Soha Ali Salamah**
Faculty of Sciences || Al-Baath University || Syria

**Abstract:** In this paper we talk about Heisenberg group, the most know example from the lie groups. After that we discuss the representation theory of this group, and the relationship between the representation theory of the Heisenberg group and the position and momentum operators, that shows how we will make the connection between the Heisenberg group and physics.

we have considered only the Schrödinger picture. That is, all the representations we considered are realized on the Hilbert space $L^2(\mathbb{R}^n)$.

we define the group Fourier transform on the Heisenberg group as an operator valued function, and other facts and properties.

The main aim of our research is having the formula of Schrödinger Representation that connect physics with the Heisenberg group.

Depending on this Representation we will study new formulas for some mathematical concepts such us Fourier Transform and Weyl transform .

**Keywords:** Heisenberg group, The Schrödinger Representation, the convolution, The Group of Fourier Transform, Weyl transform .

# دور زمرة هايزنبرغ في التحليل التوافقي

**سهى علي سلامة**
قسم الرياضيات || كلية العلوم || جامعة البعث || سوريا

**الملّخص:** عرّفنا في بحثنا هذا زمرة هايزنبرغ، وهي الزمرة الأكثر شهرةً من زمر لي. ثمّ ناقشنا نظريّة التمثيل لهذه الزمرة، إضافةً إلى العلاقة بين نظريّة التمثيل لزمرة هايزنبرغ، ومؤثرات كميّة الحركة والموضع. وهذا ما يُبيّن لنا كيفية تحقيق الترابط بين زمرة هايزنبرغ والفيزياء.

و سنأخذ في بحثنا هذا بوجهة نظر شرودنجر schrödinger، التي تعتبر أنّ جميع التمثيلات التي نفرضها تتحقق على فضاء هيلبرت $L^2(\mathbb{R}^n)$. ثمّ نُعرّف زمرة تحويل فورييه على زمرة هايزنبرغ. إضافةً إلى مفاهيم أخرى ذات أهميّة في الأبحاث المشابهة.

إنّ الهدف الرئيسي في بحثنا هذا هو الوصول إلى صيغة تمثيلات شرودنجر التي تربط بين الفيزياء وزمرة هايزنبرغ. وسندرس بالاعتماد على هذه التمثيلات صيغاً جديدة لبعض المفاهيم الرياضيّة مثل تحويل فورييه وتحويل وايل.

**الكلمات المفتاحيّة:** زمرة هايزنبرغ، تمثيلات شرودنجر، التلاف، زمرة تحويل فورييه، تحويل وايل.

**المقدّمة:** يرتبط الإطار الرياضي لميكانيك الكم ارتباطاً وثيقاً بما يصفه علماء الرياضيات بنظريّة تمثيل الزمر. وفي بحثنا هذا سندرس هذه الفكرة ببعض التفصيل، ونعمل من خلال بعض الأنواع من الزمر، وذلك كنتيجةٍ للعلاقة الأساسيّة بين ميكانيك الكم ونظرية التمثيل، والتي ببساطة تدور حول أنّه عندما يكون لدينا جملة كموميّة فيزيائيّة تؤثر عليها زمرة $G$، فإنّ فضاء الحالة لهذه الجملة سيكون كما التمثيل الواحدي للزمرة المؤثرة عليها. وهذا يعني أنّ

نظرية التمثيل تُقدّم معلوماتٍ مهمّةً حول فضاءات الحالة الميكانيكية الكموميّة عندما تؤثر زمرة ما على هذه الجملة الفيزيائية. [2], [12], [14]

وبذلك تصبح الفيزياء بالنسبة لعلماء الرياضيات مصدراً مثمراً للغاية لدراسة التمثيلات الواحدية.

كانت بداية ظهور بنية زمر لي عندما لاحظ عالم الرياضيات Sophus Lie عام 1870 العلاقة الوثيقة بين هذا النوع من الزمر، وحلول بعض المعادلات التفاضليّة. ثمّ تمّت الملاحظة بأنّ المولّدات لزمر لي المؤثرة على فضاءاتٍ مناسبة، لها الصيغة نفسها التي تتميز بها الدوال الخاصّة.

ومن الأمثلة عن زمر لي عديمة القوى نجد زمرة هايزنبرغ، وإنّ موضوع دراستنا في هذا البحث هو التحليل التوافقي على هذه الزمرة حيث عرّفنا تمثيلاتٍ واحدية على زمرة هايزنبرغ واستخدمنا هذه التمثيلات في حل بعض مسائل التحليل. [2], [4], [14]

**مشكلة البحث:** إنّ زمرة هايزنبرغ تدخل في العديد من المجالات التطبيقيّة بما في ذلك الجوانب المختلفة لميكانيك الكم. وقد سُمّيت هذه الزمرة عند علماء الرياضيات بزمرة هايزنبرغ، في حين أطلق عليها علماء الفيزياء اسم ( زمرة وايل ) weyl group. هذا وتُعتبر هذه الزمرة الأكثر شهرةً في زمر لي عديمة القوى، وتلعب دوراً هامّاً في العديد من فروع الرياضيات، مثل نظريّة التمثيل، المعادلات التفاضليّة الجزئيّة، ونظريّة الأعداد... إضافةً إلى أنّها تُقدّم توسعاً ملحوظاً في الحصول على نتائجٍ مهمّةٍ في التحليل التوافقي الإقليدي. [14]

**تعريف $(1)$**: $[8], [2]$ إنّ زمرة هايزنبرغ هي زمرة من الانسحابات للنصف العلوي لفضاء سيجل في الفضاء $\mathbb{C}^{n+1}$(the Siegel upper half space)، ويعرّف عليها قانون التشكيل بالعلاقة:

$$(\mathrm{x},\mathrm{y},\mathrm{t})(u,v,s)=\left(x+u,y+v,t+s+\frac{1}{2}(u.y-v.x)\right)$$

ويُرمز لهذه الزمرة بالرمز $\mathbb{H}^n$.

كما يتحقق أن $\mathbb{H}^n=\mathbb{C}^n\times\mathbb{R}$ وفق قانون تشكيلٍ مكافئ للقانون السابق يُعطى بالعلاقة:

$$(z,t)(w,s)=\left(z+w,t+s+\frac{1}{2}Im(z.\overline{w})\right)$$

**تعريف $(2)$**: $[8]$ فضاء شوارتز على $\mathbb{H}^n$، هو فضاء شوارتز على $\mathbb{R}^{2n+1}$ المعرّف بالشكل:

$$S(\mathbb{H}^n)=\left\{\phi:\|\phi\|_{\alpha,\beta}\equiv Sup_{x\in\mathbb{H}^n}\left|x^\alpha\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\beta f(x)\right|<\infty\right\}$$

(واضح أن $\|.\|_{\alpha,\beta}$ نصف نظيم، و$S(\mathbb{H}^n)$ فضاء Frechet).

و حيث إنّ $\alpha,\beta$ دليلان متعدّدان.

_ لدينا في زمرة هايزنبرغ $(2n+1)$ زمرة جزئية بوسيطٍ واحد، يقابلها $(2n+1)$ حقلاً متجهاً لا متغيّراً يسارياً، وهي: $[14]$

$$j=1,2,\dots,n\ X_j=\left(\frac{\partial}{\partial x_j}-\frac{1}{2}y_j\frac{\partial}{\partial t}\right)$$

$$j=1,2,\dots,n\ Y_j=\left(\frac{\partial}{\partial y_j}+\frac{1}{2}x_j\frac{\partial}{\partial t}\right)$$

$$T=\frac{\partial}{\partial t}$$

وإنّ هذه الحقول المتجهة تولّد جبر لي $\mathfrak{h}_n$ لزمرة هايزنبرغ. وتكون علاقة التبادل الوحيدة غير التافهة هي العلاقة: $[X_j,Y_j]=T\ ;j=1,2,\dots,n$

**تعريف $(3)$: التمثيل (Representation)**: [1], [2], [4], [7]

التمثيل $\pi$ للزمرة $G$ هو تشاكل من الزمرة $G$ إلى الزمرة $GL(V)$ ( زمرة المؤثرات الخطيّة القابلة للعكس على $V$ )، حيث $V$ هو فضاء متجهي عقدي غير صفري، نعتبره كفضاء تمثيل لـ $\pi$.

**تعريف $(4)$: التمثيل الواحدي (Unitary representation)**: **[2], [4], [7], [15]**

ندعو التمثيل $\pi$ تمثيلاً واحدياً إذا تحقق أنّه لأجل كل $g \in G$ فإنّ المؤثر $\pi(g)$ واحدي على $V$، أي إذا تحققت العلاقة:

$$\langle \pi(g)(v), \pi(g)(w) \rangle = \langle v, w \rangle$$

لأجل كل $g \in G$ و$v, w \in V$.

**تعريف $(5)$: [2], [12], [14]**

يُطلق على الفضاء الجزئي المغلق $W \subset V$ بأنّه فضاء لا متغيّر بالنسبة لـ $\pi$ إذا تحققت العلاقة:

$$\pi(g)W \subset W$$

لأجل كل $g \in G$.

**تعريف $(6)$: التمثيل غير القابل للاختزال: [2], [4], [12], [14]**

يُطلق على التمثيل $\pi$ إنّه غير قابل للاختزال إذا لم يتواجد أي فضاء جزئي لا متغيّر بالنسبة لـ $\pi$ ومغلق تماماً، أي أن يكون الفضاء الجزئي اللا متغير والمغلق الوحيد هو فقط $O$ إضافة إلى الفضاء $V$ نفسه.

**تعريف $(7)$: [4], [12]** نقول عن التمثيلين الواحديّين $\rho$ و$\pi$ إنّهما متكافئان واحديّاً، إذا وجد $T \in \mathcal{U}(\mathcal{H})$ بحيث يتحقق:

$$\rho(g) = T\, \pi(g)\, T^* \,; \forall g \in G$$

حيث $\mathcal{U}(\mathcal{H})$ هي زمرة من المؤثرات الواحديّة المؤثرة على $\mathcal{H}$.

إنّ هدفنا في هذا البحث هو إظهار دور زمرة هايزنبرغ في التحليل التوافقي، والوصول إلى النتائج الأساسيّة.

## مواد البحث وطرائقه:

اعتمدت الدراسة منهجاً يقوم على إعادة صياغة التعاريف الأساسية للعديد من المفاهيم الرياضيّة اعتماداً على زمرة هايزنبرغ، وذلك من خلال تمثيلات شرودنجر لهذه الزمرة، الأمر الذي يوسّع الآفاق لحل العديد من المسائل في التحليل الرياضي باستخدام أنواعٍ من الزمر. ومن أهم أدوات هذا البحث الربط بين الفيزياء وميكانيك الكم وزمرة هايزنبرغ ما يعطينا مصدراً مثمراً للغاية لدراسة التمثيلات الواحدية والوصول إلى الغايات المرجوّة والمراجع والوثائق اللازمة.

**النتائج:** إنّ ما يُظهر الارتباط بين هذه الزمرة ونظرية تمثيلاتها في ميكانيك الكم هو فكرة أنّ فضاء الحالة لجسيم الكم سيكون تمثيلاً واحدياً لهذه الزمرة مع مجموعة من الانسحابات. [2]

وبتمثيل عناصر زمرة هايزنبرغ كمؤثرات فوق الفضاء المتجهي غير المنتهي الأبعاد $L^2(\mathbb{R})$، فإنّ هذا التمثيل هو ما يحقق الاتصال بين زمرة هايزنبرغ والفيزياء.

## المناقشة:

### 1.1. تمثيلات شرودنجر (The Schrödinger Representation):

سنُبيّن الآن العلاقة بين نظريّة التمثيل لزمرة هايزنبرغ، ومؤثرات الكم.

لنرمز بـ $S(\mathbb{R}^n)$ لفضاء الدوال $f(\xi)$ المعرّفة على $\mathbb{R}^n$، والمحققة للشرط:

$$S(\mathbb{R}^n) = \left\{\phi: \|\phi\|_{\alpha,\beta} \equiv Sup_{x\in\mathbb{R}^n} \left|x^\alpha \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\beta f(x)\right| < \infty\right\}$$

و ذلك من أجل أيّ دليلين مضاعفين $\beta$و $\alpha$.

يُعرّف مؤثر الموضع في ميكانيك الكم بالتطبيق الخطي: [12]

$$Q_j: S(\mathbb{R}^n) \to S(\mathbb{R}^n)$$

$$Q_j f(\xi) := X_j f(\xi) := \xi_j f(\xi)$$

لأجل $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$ , $j = \{1, \dots, n\}$ .

ويُعرّف مؤثر كميّة الحركة بالشكل:

$$P_j: S(\mathbb{R}^n) \to S(\mathbb{R}^n)$$

$$P_j f(\xi) := \mathrm{h} D_j f(\xi) := -ih \frac{\partial}{\partial \xi_j} f(\xi)$$

لأجل $\xi \in \mathbb{R}^n$ , $j = \{1, \dots, n\}$

حيث $h$ هو عدد حقيقي غير صفري ( في نظريّة الكم $h$ هو ثابت بلانك، ويأخذ قيمة عدديّة صغيرة جداً).

وبالحساب نجد:

$$[D_j, D_k] = [Q_j, Q_k] = 0$$

$$[D_j, Q_k] = -ih\, \delta_{jk} I$$

وتسمّى علاقة التبادل هذه بعلاقة تبادل هايزنبرغ.

و تكون علاقة التبادل الأساسيّة بين المؤثرات $D_j$و $Q_j$ هي:

$$[D_j, Q_k] = iI\ ; j = \{1, \dots, n\}$$

و $I$ هو المؤثر المطابق.

لنفرض الآن تطبيقاً $A_h$ من جبر هايزنبرغ $\mathfrak{h}_n$ في مجموعة المؤثرات المتناظرة عكسيّاً (skew symmetric) على $S(\mathbb{R}^n)$، ولنفرض أنّه مُعرّف بالشكل: [12]

$$A_h(x, y, t) = i(tI + xX + hyD)$$

حيث بَيّنا فيما سبق أنّ: $Q_j := X_j$و $P_j := hD_j$

وكذلك يكون:

$$x.X = \sum_{j=1}^{n} x_j X_j$$

$$y.D = \sum_{j=1}^{n} y_j D_j$$

نلاحظ أنّ التطبيق $A_h$ هو تشاكل جبري لي، ولذلك فهو أيضاً تمثيل جبر لي لـ $\mathfrak{h}_n$ على $S(\mathbb{R}^n)$. ويجب أن نحصل بأخذنا لأس هذا التطبيق على تمثيل لزمرة هايزنبرغ $\mathbb{H}^n$ على $L^2(\mathbb{R}^n)$.

لنأخذ $h = 1$، وبالحساب نحصل على المؤثرات $e^{tI+xX+yD}$ بالشكل:

$$e^{i(tI+xX+yD)}\varphi(\xi) = e^{it+ix\xi+i\frac{xy}{2}}\varphi(\xi + y) \quad (1.1)$$

لنعرّف الآن ثلاثة مؤثرات الأول مؤثر دوران، والثاني مؤثر جداء بعدد عقدي، والثالث مؤثر انسحاب، كما في الصيغ الموّضحة: [12], [15]

$$e(x)f(\xi) = e^{ix\xi}f(\xi)$$
$$\mu(t)f(\xi) = e^{it}f(\xi)$$
$$\tau(y)f(\xi) = f(\xi + y)$$

حيث $x, y \in \mathbb{R}^n\,, t \in \mathbb{R}$

من العلاقة $(1.1)$ نحصل على العلاقة الآتية:

$$e^{i(tI+xX+yD)}\varphi(\xi) = e^{it}e^{ix\xi+i\frac{xy}{2}}\varphi(\xi + y) = e^{itI}e^{i(xX+yD)}\varphi(\xi) \quad (1.2)$$

و يكون لدينا:

$$e(x) = e^{ixQ} \text{ و} \tau(y) = e^{iyD}$$

و من علاقة التبادل الأساسيّة بين المؤثرات $D_j$ و $Q_j$، ومن أجل المجموعتين:

$$\{e(x): x \in \mathbb{R}^n\} \text{ و} \{\tau(y): y \in \mathbb{R}^n\}$$

فإنّ علاقة التبادل تأخذ الشكل الآتي:

$$e(x)\,\tau(y) = e^{-ixy}\,\tau(y)\,e(x)$$

و يكون: $e^{i(xX+yD)} = e^{\frac{i}{2}xy}e(x)\,\tau(y)$

والآن لتكن $u, v \in \mathbb{R}^n$، وبالحساب نحصل على ما يلي:

$$e^{i[(x+u)X+(y+v)D]}\varphi(\xi) = e^{i(x+u)\xi+i\frac{(y+v)(x+u)}{2}}\varphi(\xi + y + v)$$

و $$e^{i(xX+yD)}e^{i(uX+vD)}\varphi(\xi) = e^{i(xX+yD)}e^{iu\xi+i\frac{vu}{2}}\varphi(\xi + v)$$
$$= e^{\frac{i}{2}xy}e(x)\,\tau(y)\,e^{iu\xi+i\frac{vu}{2}}\varphi(\xi + v)$$
$$= e^{\frac{i}{2}xy}e(x)\,e^{iu(\xi+y)+i\frac{vu}{2}}\varphi(\xi + y + v)$$
$$= e^{ix\xi+i\frac{xy}{2}+iu(\xi+y)+i\frac{vu}{2}}\varphi(\xi + y + v)$$

كما نلاحظ صِحّة العلاقة الآتية:

$$e^{i(xX+yD)}e^{i(uX+vD)} = e^{\frac{i}{2}(yu-xv)}e^{i[X(x+u)+D(y+v)]}$$

ثمّ نحصل على المتطابقة:

$$e^{i(tI+xX+yD)}e^{i(sI+uX+vD)} = e^{i\left[\left(t+s+\frac{1}{2}(yu-vx)\right)I+(x+u)X+(y+v)D\right]}$$

ونلاحظ أنّ هذه الأسس تبدو كعناصر $\mathbb{H}^n$.

في هذه المرحلة لنضع ثابت بلانك في التعريف فنحصل على الصيغة:

$$\pi_h(x, y, t) = e^{i(htI+xQ+hyD)} = e^{ihtI}e^{i(xQ+hyD)} \quad (1.3)$$

أو الصيغة المكافئة لها:

$$\pi_h(x,y,t)\varphi(\xi):=e^{iht+ix\xi+ih\frac{xy}{2}}\varphi(\xi+hy)\ (1.4)$$

وسنرمز فيما بعد بالرمز $\pi$ بدلاً من الرمز $\pi_1$.

**مبرهنة $(1)$:** $[12]$

ليكن $h\in\mathbb{R}$ عندئذٍ التطبيق $\pi_h$ من زمرة هايزنبرغ $\mathbb{H}^n$ إلى فضاء المؤثرات الخطيّة المحدودة على $L^2(\mathbb{R}^n)$ المعرّف بالشكل:

$$\pi_h(x,y,t):=e^{i(htI+xQ+hyD)}$$

هو تمثيل واحدي لـ $\mathbb{H}^n$ على فضاء هيلبرت $L^2(\mathbb{R}^n)$، ويُدعى تمثيل شرودنجر مع الوسيط $h$.

**مبرهنة$(2)$: مبرهنة Stone_ Von Neumann** $[16]$

ليكن $\lambda\neq 0$ ; $\pi_\lambda$تمثيل غير قابل للاختزال للزمرة $\mathbb{H}^n$، وإذا كان $\rho$ هو تمثيل واحدي وغير قابل للاختزال من $\mathbb{H}^n$ على فضاء هيلبرت $H$، أيّ:

$$\rho(0,0,t)=e^{i\lambda t}\mathrm{I}$$

لأجل كل $\lambda\neq 0$. عندئذٍ فإنّ $\pi_\lambda$و $\rho$ متكافئان واحديّاً.

**ملاحظة $(1)$:** $[6]$ لدينا في العديد من الأبحاث أنّه من مبرهنة Stone_ Von Neumann فإنّ التمثيلات الواحديّة غير القابلة للاختزال، وغير المنتهيّة البعد للزمرة $\mathbb{H}^n$ والمؤثرة على $L^2(\mathbb{R}^n)$، يمكن تعريفها بأخذ وسطاء من $\mathbb{R}^*=\mathbb{R}\setminus\{0\}$. حيث لأجل $\lambda\in\mathbb{R}^*$ يُعرّف تمثيل شرودنجر الذي سنرمز له في بحثنا بالرمز $\pi_\lambda$ للزمرة $\mathbb{H}^n$ بالشكل:

$$\pi_\lambda(x,y,t)\varphi(\xi)=e^{i\lambda t}e^{i\lambda\left(x\xi+\frac{1}{2}xy\right)}\varphi(\xi+y)\ (1.5)$$

حيث $\xi\in\mathbb{R}^n$ و$\varphi\in L^2(\mathbb{R}^n)$.

و بأخذ $\lambda=1$ يكون: $\pi_1(x,y,t)=e^{it}\pi(z)$ حيث $z=x+iy$

حيث: $\pi(z)\varphi(\xi)=e^{i\left(x\xi+\frac{1}{2}xy\right)}\varphi(\xi+y)$

### 1.2. زمرة تحويل فورييه على زمرة هايزنبرغ:

سنُعرّف تحويل فورييه للدوال القابلة للمكاملة $f\in L^1(\mathbb{H}^n)$.

لأجل كل $\lambda\in\mathbb{R}^*$، فإنّ $\hat{f}(\lambda)$ مؤثر يؤثر على $L^2(\mathbb{R}^n)$، ويُعطى بالشكل: $[6],[9],[10],[14]$

$$\hat{f}(\lambda)\varphi=\int_{\mathbb{H}^n}f(z,t)\pi_\lambda(z,t)\varphi dzdt\ (2.1)$$

حيث $\pi_\lambda(z,t)$ هي تمثيلات شرودنجر، والتكامل هو تكامل بوخنر (Bochner integral)، ويأخذ قيماً في فضاء هيلبرت $L^2(\mathbb{R}^n)$.

ليكن $L\left(L^2(\mathbb{R}^n)\right)$ فضاء المؤثرات الخطيّة المحدودة على $L^2(\mathbb{R}^n)$، $[10]$ عندئذٍ يكون:

$$\hat{f}(\lambda)\in L\left(L^2(\mathbb{R}^n)\right)$$

و $\left\|\hat{f}(\lambda)\right\|_{op}\leq\|f\|_{L^1}$

لتكن $\psi$ دالّة أخرى من $L^2(\mathbb{R}^n)$، عندئذٍ تكون لدينا العلاقة الآتية:

$$\left(\hat{f}(\lambda)\varphi,\psi\right)=\int_{\mathbb{H}^n}f(z,t)(\pi_\lambda(z,t)\varphi,\psi)dzdt$$

و بما أنّ $\pi_\lambda(z,t)$ هي مؤثرات واحدية، فإنّنا نحصل على العلاقة:

$$|(\pi_\lambda(z,t)\varphi,\psi)|\leq\|\varphi\|_2\|\psi\|_2$$

و بالتالي: $\left|\left(\hat{f}(\lambda)\varphi,\psi\right)\right|\leq\|\varphi\|_2\|\psi\|_2\|f\|_{L^1}$

و هذا ما يُبيّن لنا أنّ $\hat{f}(\lambda)$ هو مؤثر محدود على $L^2(\mathbb{R}^n)$، ونظيم المؤثر يحقق العلاقة:

$$\left\|\hat{f}(\lambda)\right\|\leq\|f\|_{L^1}$$

**تعريف (8):** $[\mathbf{6}],[\mathbf{10}]$

نُعرّف التلاف (convolution) $f*g$ للدالتين $f,g$ من $\mathbb{H}^n$ بالعلاقة:

$$(f*g)(z,t)=\int_{\mathbb{H}^n}f\big((z,t)(-w,-s)\big)g(w,s)dwds \quad (2.2)$$

حيث $(z,t)\in\mathbb{H}^n$. وذلك عندما يكون التكامل موجوداً.

**تعريف (9):** $[\mathbf{6}],[\mathbf{10}]$

لنكتب: $\pi_\lambda(z,t)=e^{i\lambda t}\pi_\lambda(z)$

حيث: $\pi_\lambda(z)=\pi_\lambda(z,0)$

و لنُعرّف:

$$f^\lambda(z)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\lambda t}f(z,t)dt \quad (2.3)$$

بأنّه تحويل فورييه العكسي لـ $f$ بالمتغير $t$.

و بالتالي تنتج العلاقة: [6]

$$\hat{f}(\lambda)\varphi=\int_{\mathbb{C}^n}f^\lambda(z)\pi_\lambda(z)\varphi dz \quad (2.4)$$

و بالتالي يمكننا فرض مؤثرات بالشكل: [6], [9], [10]

$$W_\lambda(g)=\int_{\mathbb{C}^n}g(z)\pi_\lambda(z)dz \quad (2.5)$$

للدوال من $\mathbb{C}^n$.

و عندما $\lambda=1$، فإنّنا ندعو هذه المؤثرات تحويل وايل (Weyl transform) ونرمز له بالرمز $W(g)$.

و نكتب أيضاً $\pi(z)$ بدلاً من $\pi_1(z)$.

و بالتالي نحصل على العلاقة:

$$W(g)\varphi(\xi)=\int_{\mathbb{C}^n}g(z)\pi(z)\varphi(\xi)dz \quad (2.6)$$

**الخلاصة:** وبذلك نكون قد اعتمدنا على نوع من أنواع الزمر وهي زمرة هايزنبرغ في تعريفنا لتحويل فورييه وتحويل وايل. حيث قمنا بالوصول إلى نوعٍ من التمثيلات الواحدية غير القابلة للاختزال لهذه الزمرة، وهي تمثيلات شرودنجر التي تُعتبر صيغة أساسية للترابط بين هذه الزمرة والفيزياء.

**التوصيات:** يمكننا إثبات العديد من المبرهنات الهامّة باستخدام زمرة هايزنبرغ وتمثيلات شرودنجر لهذه الزمرة، مثل مبرهنات بالي_ وينر الشهيرة لتحويل فورييه وتحويل وايل. هذا إضافةً إلى العديد من المسائل المرتبطة

بالتحويلات التي يمكن دراستها بشكل أبسط اعتماداً على زمرة هايزنبرغ مثل تحويل فورييه_ ويغنر الذي يُعطى بالعلاقة: [16]، [18]

$$V_\varphi(\psi, z) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}}(\pi(z)\varphi, \psi)$$

حيث: $\varphi, \psi \in L^2(\mathbb{R}^n)$

وكذلك تحويلات ريس التي تُعطى أيضاً اعتماداً على مؤثر لابلاس الجزئي بالعلاقة: [13]

$$R_j = Z_j \boldsymbol{\mathcal{L}}^{-\frac{1}{2}}$$

$$\overline{R_j} = \overline{Z_j}\boldsymbol{\mathcal{L}}^{-\frac{1}{2}}\,; j = 1,2,\dots,n$$

حيث: [3]

$$\boldsymbol{\mathcal{L}} = -\sum_{j=1}^{n}\left(X_j^2 + Y_j^2\right)$$

و $X_j, Y_j$ هي الحقول المتجهة اللامتغيرة يسارياً التي سبق وعرفناها.

و

$$Z_j = X_j - iY_j$$

$$\overline{Z_j} = X_j + iY_j\,; j = 1,2,\dots,n$$

الأمر الذي يفتح مجالاً جديداً للدراسة والبحث.

## قائمة المراجع:


1- Casselman, B.: "*Continuous representations*". University of British Columbia, (2019).

2- Celebi, R., Hendricks, K. and Jordan, M.: "The Heisenberg group and uncertainty principle in Mathematical physics". *Research program under the supervision of Dr. Hadi Salamasian*, university of Ottawa, (2015).

3- Dasgupta, A., Molahajloo, S. and Wong, M.W.: "The spectrum of the sub_ laplacian on the Heisenberg group". *Tohoku Math*. J. 63 (2011), 269_ 276.

4- Fischer, V. and Ruzhansky, M.: "Quantization on nilpotent Lie groups". *Progress in Mathematics*, (2015).

5- Geller, D.: "Spherical harmonics, the Weyl transform and the Fourier transform on the Heisenberg group". *Canad. J. Math*. 36 (1984), no. 4, 615_ 684.

6- Ghosh, S. and Srivastava, R.K.: "*Heisenberg uniqueness pairs for the Fourier transform on the Heisenberg group*". Guwahati, India, (2018).

7- Kisil, V.: "*The Heisenberg group in Mathematics and physics*". University of Leeds, England, Varna, (2016).

8- Krantz, S.: "*Explorations in Harmonic Analysis with applications to complex function theory and the Heisenberg group*". Birkhäuser, Boston, (2009).

9- Kunze, R.:" $L^p$ Fourier transforms on locally compact unimodular groups". *Trans. Amer. Math*. Soc., 89 (1958), 519_ 540.

10- Lakshmi Lavanya, R. and Thangavelu, S.: "A characterization of the Fourier transform on the Heisenberg group". *Ann. Funct. Anal.* 3, no. 1, 109_ 120, (2012).

11- Peetre, J. and Sparr, G.:" Interpolation and noncommutative integration". *Ann. Mat. Pura Appl.*, CIV (1975), 187_ 207.

12- Rottensteiner, D.: "Foundations of Harmonic analysis on the Heisenberg group". *Progress for obtaining the academic degree: Master of science*, University of Vienna, (2010).

13- Sanjay, P.K. and Thangavelu, S.:" *Revisiting Riesz transforms on Heisenberg groups*". Bangalore, India (2012).

14- Thangavelu, S.: "Harmonic analysis on the Heisenberg group". *Progress in Mathematics* 159, Birkhäuser, Boston, MA, (1998).

15- Woit, P.: "*Quantum theory, groups and representations: An introduction (final draft version)*". Columbia university, (2017).

16- Rosenberg, J.: "A selective History of the Stone_ Von Neumann theorem". Department of mathematics, university of Maryland, *college Park,* MD 20742_ 4015, (2003).