Journal of Nature, Life and Applied Sciences
Volume (3), Issue (4) : 30 Dec 2019
P: 42 - 58

ISSN: 2522-3356

مجلة العلوم الطبيعية والحياتية والتطبيقية
المجلد (3)، العدد (4) : 30 ديسمبر 2019 م
ص: 42 - 58

Reduction method for solving Boundary Value Problem on Graph to it's internal edge

Amane Abu Alkhair Almalla

Berlent Sabry Mattit

Faculty of Science || Damascus University || Syria

Moaaz Ali Abdelmajeed

Faculty of Mechanical and Electrical Engineering || Damascus University || Syria

Abstract: The main aim to this research is to reduce the boundary value problem for fourth differential equation on geometric graph with cycles to a problem on a internal edge provided that the right hand side of the differential equation is identically zero on some subgraph of the original graph, and in this research we find the sign of some coefficients in the boundary conditions of the reduced problem and relationship between these coefficients. That's helping us to prove existence and uniqueness for a boundary value problem resulting from this reduction.

In order to reach our desired goal, we study the reduction method of boundary value problem for fourth differential equation on tree geometric graph(no cycles), finally we can say that our research help us to study green function on edge(interval) instead of complex sty ding on geometric graph(with cycles).

Keywords: boundary value problem, geometric graph, reduction method, existence and uniqueness.

طريقة التخفيض لحل مسألة قيم حدية على البيان إلى ضلع داخلي منه

أماني أبو الخير الملا

برلنت صبري مطيط

كلية العلوم || جامعة دمشق || سوريا

معاذ علي عبد المجيد

كلية الهندسة الميكانيكية والكهربائية || جامعة دمشق || سوريا

الملخص: إنَّ الهدف الرئيس من هذا البحث هو نقل دراسة مسألة قيم حدية لمعادلة تفاضلية عادية من المرتبة الرابعة مع شروط حدية على بيان هندسي يحوي حلقات، إلى دراسة هذه المسألة على أحد الأضلاع الداخلية لهذا البيان، بفرض أنّ الطرف الأيمن للمعادلة التفاضلية المدروسة يكون مطابقاً للصفر على بيان جزئي من البيان الأصلي. حيث تسمح هذه الطريقة بالتعبير عن أي دالي لحلول المسألة المدروسة على بيان جزئي من البيان على شكل تركيب خطي لقيم هذه الحلول ومشتقاتها. مما يُجنب الاهتمام بدراسة مسألة القيم الحدية على ذلك البيان الجزئي، والانتقال إلى دراسة مسألة القيم الحدية متعددة النقطية على ما تبقى من البيان مع الشروط المعاد ترتيبها. ويتطلب ذلك دراسة إشارة بعض معاملات الشروط الحدية للمسألة الناتجة عن هذا الانتقال والعلاقات بين هذه المعاملات، مما يُساعد، لاحقاً، في إثبات وجود ووحدانية الحل لمسألة القيم الحدية الناتجة عن هذا الانتقال وكذلك دراسة غرين على ضلع (مجال) بدلاً من دراستها المعقدة على البيان الهندسي الذي يحوي حلقات. وكي نصل إلى هدفنا هذا، اعتمدنا على أسلوبٍ مُشابه في حالة بيان شجرة.

الكلمات المفتاحية: مسألة قيمة حدية، بيان هندسي، طريقة التخفيض، وجود ووحدانية.

المقدمة:

بدأت دراسة مسائل القيم الحدية من أجل معادلات تفاضلية عادية من المرتبة الثانية على البيان الهندسي بشكل جدي في ثمانينات القرن العشرين، مثلاً (Pokornyi & Borovskikh, 2004- Pokornyi, et al., 2008). وقد ظهرت هذه المسائل عند وصف جمل من الأوتار مرتبطة بعضها ببعض. وكذلك درست الجمل المؤلفة من قضبان مرتبطة بعضها ببعض، حيث إن اهتزازاتها المرنة توصف بمعادلات تفاضلية عادية من المرتبة الرابعة على البيان الهندسي (Borovskikh & Lazarev, 2004- Pokornyi & Mustafokulov, 1997- Mustafokulov & Soliev, 2014- Lagnese, et al., 1993).

وفي بداية القرن الحالي بدأت دراسة هذا النوع من المسائل باستخدام طريقة التخفيض (Pokornyi & Borovskikh, 2004). وقد استُخدمت هذه الطريقة عند دراسة مسألة قيم حدية لمعادلة تفاضلية من المرتبة الرابعة على البيان الهندسي في حال كان الارتباط عند العقد الداخلية ارتباطاً مرناً (Pokornyi & Borovskikh, 2004)، بينما اقتصرت الدراسات السابقة على حالة الارتباط غير المرن عند العقد الداخلية في حالة البيان شجرة فقط (Kulaev, 2014).

كما استُخدمت طريقة التخفيض على البيان الهندسي وذلك لحل مسائل قيم حدية متنوعة لمعادلات تفاضلية جزئية (Kulaev, et al., 2018).

مشكلة البحث:

لا تكمن الصعوبة فقط في طريقة التخفيض (نقل دراسة مسألة قيم حدية لمعادلة تفاضلية عادية من المرتبة الرابعة على بيان هندسي Γ يحوي حلقة، الشكل 1، إلى دراسة هذه المسألة على ضلع داخلي من حلقة البيان) وإنما في كيفية إثباتها أيضاً. فقد ظهرت الصعوبة الكبيرة في معرفة ودراسة إشارة معاملات المسألة الناتجة عن هذا الانتقال والعلاقات بينها.

المسألة المدروسة:

ندرس على البيان Γ المعادلة التفاضلية التالية:

$$Lu \equiv (p(x)u'')'' - (q(x)u')' = f(x);\ x \in \Gamma \qquad (1)$$

$$Lu \equiv (p(x)u'')'' - (q(x)u')' = 0;\ x \in \Gamma \qquad (1')$$

ويحقق الحل عند العقد الحدية الشروط:

$$u(b) = 0\ ;\ b \in \partial\Gamma \qquad (2)$$

$$\vartheta(b)u'(b) + \beta(b)u''(b) = 0\ ;\ b \in \partial\Gamma \qquad (3)$$

ويحقق عند العقد الداخلية الشروط: $a \in J(\Gamma)$

$$u_i(a) = u_k(a), u_i'(a) = \alpha_{ki}(a)u_k'(a) + \alpha_{ji}(a)u_j'(a) \qquad (4)$$

حيث i, j, k أدلة للأضلاع المرتبطة بالعقدة a كما أننا نسمي في هذ الحالة j و k دليلين أساسيين بالنسبة إلى i.

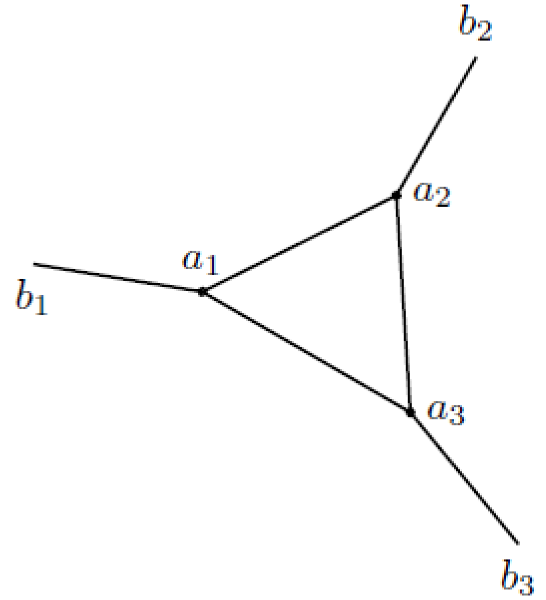
$$\sum_{i\in I(a)} p_i(a)\alpha_{ki}(a)u_i''(a) = 0\ ,\ \sum_{i\in I(a)} p_i(a)\alpha_{ji}(a)u_i''(a) = 0 \qquad (5)$$

$$\sum_{i\in I(a)} D^3u_v(a) = 0\ ;\ a \in J(\Gamma) \tag{6}$$

سوف نفرض أن كل المشتقات محسوبة، بما فيها $D^3u = (p(x)u'')' - q(x)u'$، بالاتجاه "إلى العقدة". أما المعاملات في (4) و (5) فهي تحقق العلاقات: $\alpha_{kk}(a) = \alpha_{jj}(a) = 1$ و $\alpha_{kj}(a) = \alpha_{jk}(a) = 0$.

ونفترض، تحقق الشروط (سنطلق عليها اختصاراً الشروط الطبيعية):

1. $p(x) \in C^2[\Gamma]\ , inf_{x\in\Gamma}\, p(x) > 0, f(x) \in C[\Gamma], q(x) \in C^1[\Gamma], q(x) \geq 0; x \in \Gamma$
2. $\beta(b) \geq 0, \vartheta(b) \geq 0\ , \vartheta(b) + \beta(b) \neq 0\ ;\ \forall b \in \partial\Gamma.$
3. $\alpha_{ki}(a) < 0, \alpha_{ji}(a) < 0\ ;\ \forall a \in J(\Gamma)\ , \forall i \in I(a)\backslash\{j,k\}.$



الشكل $\boxed{1}$ **نموذج بسيط لبيان Γ يحوي حلقة**

توضيح أهداف البحث

تعريف المفاهيم

هدف البحث:

يهدف البحث إلى نقل دراسة مسألة القيم الحدية من بيان يحوي حلقة إلى ضلع داخلي من الحلقة، معتمدين على دراسة مشابهة من اجل بيان شجرة (Kulaev, 2014).

تعاريف ومفاهيم أساسية:

نذكّر بالتعاريف الأساسية لنظرية مسائل القيم الحدية على البيان الهندسي (Pokornyi & Borovskikh, 2004).

البيان الهندسي

البيان الهندسي (الشبكة الفضائية) Γ هو اجتماع مجموعة مجالات مفتوحة، في $\mathbb{R}^{n}$، غير متقاطعة مثنى مثنى γ_i، حيث $i = 1,2, \dots, m$، (تسمى أضلاع البيان) وبعض الأطراف المشتركة لهذه الأضلاع - التي هي طرف مشترك لضلعين على الأقل (تسمى العقد الداخلية للبيان ويُرمز لها بالرمز $J(\Gamma)$)، بحيث يكون هذا الاجتماع مترابط.

نسمى أطراف المجالات γ_i التي لا تنتمي إلى العقد الحدية للبيانΓ ونرمز لمجموعة العقد الحدية للبيان بالرمز$\partial\Gamma$. ونرمز لمجموعة جميع عقد البيان بالرمز $V(\Gamma)$.

إذا كانت العقدة a هي نقطة نهاية للضلع γ_i (طرف للمجال γ_i) عندها نقول إنَّ الضلع γ_i مجاور للعقدة a. ونرمز لمجموعة أدلة الأضلاع المجاورة للعقدة الداخلية a بالرمز $I(a)$.

يُعرّف البيان الجزئي من البيان Γ على أنه مجموعة جزئية مترابطة من البيان Γ.

نُعرّف على البيان الدالة الحقيقية $u\colon \Gamma \longrightarrow \mathbb{R}$، ونرمز لمقصور الدالة u على الضلع γ_i بـ u_i.

ونعرّف قيمة الدالة عند العقدة d بالنهاية:

$$u_i(d) = \lim_{\substack{x \longrightarrow d \\ x \in \gamma_i}} u_i(x)$$

نرمز لفضاء الدوال المستمرة بانتظام على كل ضلع من أضلاع البيان Γ بـ $C[\Gamma]$ (نلاحظ أننا لم نشترط استمرار الدوال على كامل البيان في الفضاء $C[\Gamma]$)، وعليه فإنَّه ليس بالضرورة تساوي $u_k(a)$ و $u_i(a)$عند العقدة الداخلية a حيث $k \neq i \ \in I(a)$.

ونرمز بـ $C(\Gamma)$ لفضاء الدوال المستمرة بانتظام على البيان Γ، نلاحظ أنَّ $C(\Gamma) \subseteq C[\Gamma]$.

مشتق الدالة على البيان: نُعرِّف الدالة $\tau(x) \in C[\Gamma]$ كتطبيق تقابل من الضلع γ_i إلى $(0, l_i)$ حيث $l_i > 0$ (تُعرف الدالة τ مسافة (متريك) بينما يرمزl_i لطول الضلع γ_i) من أجل مقصور الدالة τ على الضلع γ_i يوجد تطبيق عكسي $x(\tau)$ من المجال $(0, l_i)$ إلى المجال γ_i.

نقول عن الدالة $u(x)$ إنها قابلة للمفاضلة على البيان Γ إذا كان التركيب $u(x(\tau))$ قابل للمفاضلة بالنسبة إلى τ على كل ضلع γ_i من البيان Γ ونكتب عندها:

$$u'(x) = \frac{du(x(\tau))}{d\tau}$$

يوجد عند العقدة $a \in V(\Gamma)$ مشتقان موجهان، الأول "من a" (في هذه الحالة تكون $\tau(0) = a$) ونرمز له بـ $u'_{-v}(a)$ والثاني "إلى a" و نرمز له بـ $u'_v(a)$ (في هذه الحالة تكون $\tau(l_i) = a$)(حيث l_i يرمز لطول الضلع γ_i)، سنفترض أنَّ المشتق مأخوذ دائماً بالاتجاه "إلى a".

نرمز للفضاء $C^n[\Gamma]$ لمجموعة الدوال $u \in C[\Gamma]$ والتي مشتقاتها من المرتبة n مستمرة وتنتمي للفضاء $C[\Gamma]$، بينما نعرف الفضاء $C^n(\Gamma) = C^n[\Gamma] \cap C(\Gamma)$.

المعادلة التفاضلية على البيان: هي مجموعة المعادلات التفاضلية على كل ضلع من أضلاع البيان.

التكامل على البيان: يُعرَّف تكامل الدَّالة $u(x) \in C[\Gamma]$ على البيان Γ على أنه مجموع التكاملات على كامل أضلاع البيان أي:

$$\int_{\Gamma} u(x)\,dx = \sum_{i=1}^{m} \int_{\gamma_i} u_i(x)\,dx = \sum_{i=1}^{m} \int_0^{l_i} u_i(x(\tau))\,d\tau$$

مواد البحث وطرائقه:

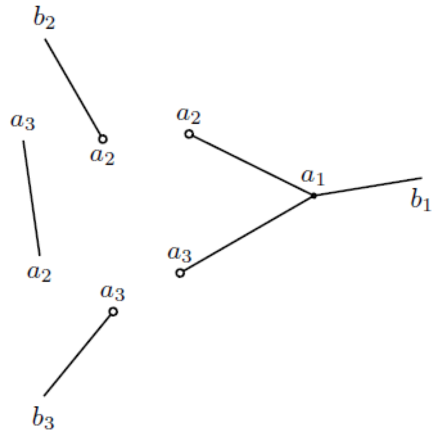
طريقة التخفيض: (Kulaev, 2014)

يُقصد بطريقة التخفيض، هنا، نقل دراسة مسألة قيم حدية لمعادلة تفاضلية عادية من المرتبة الرابعة على بيان هندسي Γ يحوي حلقة، الشكل 1، إلى دراسة هذه المسألة على ضلع داخلي من حلقة هذا البيان.

حيث تسمح لنا هذه الطريقة بالتعبير عن أي دالي لحلول هذه المسألة على البيان الجزئي $\tilde{\Gamma}$ على شكل تركيب خطي لقيم هذه الحلول ومشتقاتها عند نقاط ارتباط $\Gamma\backslash\tilde{\Gamma}$ مع $\tilde{\Gamma}$. مما يُجنبنا الاهتمام بدراسة مسألة القيم الحدية على $\tilde{\Gamma}$، والانتقال إلى دراسة مسألة القيم الحدية متعددة النقطية على $\Gamma\backslash\tilde{\Gamma}$ مع الشروط المعاد ترتيبها.

ليكن لدينا $f(x) \not\equiv 0$ على أحد الأضلاع الداخلية للبيان Γ (على سبيل المثال لنأخذ $\gamma_1 = (a_2, a_3) \subset \Gamma$)، و$f(x) \equiv 0$ على باقي أضلاع هذا البيان (الشكل1). يُمكننا أن نفرض الدليلين 1 و 2 أساسيان في شرط الملاسة عند العقدة a_2 وكذلك نفرض أنَّ الدليلين 1 و 3 أساسيان عند العقدة a_3. نحذف العقدتين a_2, a_3 من البيان Γ عندها يتجزأ البيان Γ إلى 4 مجموعات مترابطة- الضلع الداخلي γ_1 والبيان الشجرة Γ_1 الذي يرتبط بالعقدتين a_2, a_3 والبيان Γ_2 الذي يرتبط بالعقدة a_2 والبيان Γ_3 الذي يرتبط بالعقدة a_3 (الشكل 2).

نرمز للسهولة $\gamma_2 = (a_1, a_2), \gamma_3 = (a_1, a_3), \gamma_4 = (a_2, b_2), \gamma_5 = (a_3, b_3)$.



الشكل $\boxed{2}$ **تجزئة البيان الذي يحوي حلقة إلى 4 مجموعات مترابطة.**

ونرمز بـ $u_i(x)$ لمقصور الدالة $u(x)$ على الضلع γ_i حيث $i = \{1,2,3,4,5,6\}$، ونرمز بـ $U_{\Gamma_i}(x)$ لمقصور الدالة $u(x)$ على البيان Γ_i، يُمكن أن نجد مماسبق أن مقصور المعادلة التفاضلية $Lu \equiv f(x)$ على Γ_i هو المعادلة المتجانسة $LU_{\Gamma_i} \equiv 0$. إضافةً إلى ذلك تتحقق الشروط الحدية (3)-(2) عند كل العقد الحدية للبيان الجزئي Γ_i باستثناء العقدتين a_1, a_2 والشروط (6)-(3) عند العقد الداخلية للبيان الجزئي Γ_i حيث $i = \{1,2,3\}$. نكتب اختصاراً $u_i(a_1)$ بدلاً من $\lim\limits_{\gamma_i \ni x \to a_j} u(x)$ حيث $i = \{2,3\}, j = \{1,2\}$.

النتائج:

مبرهنة (1) إنَّ المسألة من (1)-(6) تُكافئ المسألة التالية:

$$Lu \equiv (p(x)u'')'' - (q(x)u')' = f(x)\ ;\ x \in \gamma_1$$
$$p_1(a_2)u_1''(a_2) + \lambda_1^0(a_2,a_3)u_1(a_2) + \lambda_1^1(a_2,a_3)u_1'(a_2) + \lambda_1^2(a_2,a_3)u_1(a_3) - \lambda_1^3(a_2,a_3)u_1'(a_3) = 0$$
$$p_1(a_3)u_1''(a_3) + \lambda_2^0(a_2,a_3)u_1(a_2) + \lambda_2^1(a_2,a_3)u_1'(a_2) + \lambda_2^2(a_2,a_3)u_1(a_3) - \lambda_2^3(a_2,a_3)u_1'(a_3) = 0$$
$$D^3u_1(a_2) + \rho_1^0(a_2,a_3)u_1(a_2) + \rho_1^1(a_2,a_3)u_1'(a_2) + \rho_1^2(a_2,a_3)u_1(a_3) - \rho_1^3(a_2,a_3)u_1'(a_3) = 0$$
$$D^3u_1(a_3) - \rho_2^0(a_2,a_3)u_1(a_2) - \rho_2^1(a_2,a_3)u_1'(a_2) - \rho_2^2(a_2,a_3)u_1(a_3) + \rho_2^3(a_2,a_3)u_1'(a_3) = 0$$

وتُحقق المعاملات الشروط التالية:

$$\Delta(a_2,a_3) > 0, \lambda_1^1(a_2,a_3) > 0, \lambda_2^3(a_2,a_3) > 0$$
$$\lambda_1^0(a_2,a_3) = -\rho_1^1(a_2,a_3), \lambda_2^0(a_2,a_3) = -\rho_1^3(a_2,a_3)$$
$$\lambda_1^2(a_2,a_3) = -\rho_2^1(a_2,a_3), \lambda_2^2(a_2,a_3) = -\rho_2^3(a_2,a_3)$$
$$\lambda_2^1(a_2,a_3) = \lambda_1^3(a_2,a_3), \rho_2^0(a_2,a_3) = \rho_1^2(a_2,a_3)$$

المناقشة:

ننظر إلى الشكل 2 فنجد أنَّ المسألة الأساسية (6)-(1) مكافئة لمجموعة المعادلات المتجانسة على $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ والمعادلة غير المتجانسة على γ_1.

عند العقدة a_1: تُصبح الشروط (6)-(3):

$$U_{\Gamma_1}(a_2) = u_2(a_2) = u_4(a_2) = u_1(a_2) \tag{7_1}$$
$$U_{\Gamma_1}(a_3) = u_3(a_3) = u_5(a_3) = u_1(a_3) \tag{7_2}$$
$$u_2'(a_2) = \alpha_{12}(a_2)u_1'(a_2) + \alpha_{42}(a_2)u_4'(a_2) \tag{8_1}$$
$$u_3'(a_3) = \alpha_{13}(a_3)u_1'(a_3) + \alpha_{53}(a_3)u_5'(a_3) \tag{8_2}$$
$$p_4(a_2)u_4''(a_2) + \alpha_{42}(a_2)p_2(a_2)u_2''(a_2) = 0 \tag{9_1}$$
$$p_1(a_2)u_1''(a_2) + \alpha_{12}(a_2)p_2(a_2)u_2''(a_2) = 0 \tag{9_2}$$
$$p_5(a_3)u_5''(a_3) + \alpha_{53}(a_3)p_3(a_3)u_3''(a_3) = 0 \tag{9_3}$$
$$p_1(a_3)u_1''(a_3) + \alpha_{13}(a_3)p_3(a_3)u_3''(a_3) = 0 \tag{9_4}$$
$$D^3u_1(a_2) + D^3u_2(a_2) + D^3u_4(a_2) = 0 \tag{10_1}$$
$$D^3u_1(a_3) + D^3u_3(a_3) + D^3u_5(a_3) = 0 \tag{10_2}$$

تمهيدية (1) (Kulaev, 2014, pp. 295)

إنَّ مسألة القيم الحدية للمعادلة المتجانسة $(1')$ مع الشروط الحدية $u(a) = 1, u'(a) = 0$ حيث $a \in \partial\Gamma$ والشروط المتجانسة (6)-(2) عند باقي عقد البيان Γ قابلة للحل بشكل وحيد.

تمهيدية (2): (Kulaev, 2014, pp. 295)

إنَّ مسألة القيم الحدية للمعادلة المتجانسة $(1')$ مع الشروط الحدية $u(a) = 0, u'(a) = 1$ حيث $a \in \partial\Gamma$ والشروط المتجانسة (6)-(2) عند باقي عقد البيان Γ قابلة للحل بشكل وحيد.

تسمح لنا التمهيدية 1 و 2 بتمثيل $U_{\Gamma_1}(x)$ بالشكل التالي:

$$U_{\Gamma_1}(x) = u_1(a_2)z_{02}(x) + u_2'(a_2)z_{12}(x) + u_1(a_3)z_{03}(x) + u_3'(a_3)z_{13}(x) \tag{11_1}$$

$$U_{\Gamma_2}(x) = u_1(a_2)z_{04}(x) + u_4'(a_2)z_{14}(x) \tag{11_2}$$

$$U_{\Gamma_3}(x) = u_1(a_3)z_{05}(x) + u_5'(a_3)z_{15}(x) \tag{11_3}$$

تُمثل الدوال $z_{0j}(x)$ حلول المعادلة المتجانسة $(1')$ على Γ_1 والتي تُحقق الشروط الحدية:

$$\lim_{\gamma_i \ni x \to a_j} z_{0j}(x) = \delta_{ij}, \lim_{\gamma_i \ni x \to a_j} z_{0j}'(x) = 0\ , j = 2,3 \tag{12_1}$$

والشروط الحدية المتجانسة $(6) - (2)$ عند باقي عقد البيان Γ_1.

تُمثل الدوال $z_{04}(x)$ حلول المعادلة المتجانسة $(1')$ على Γ_2 وتمثل الدوال $z_{05}(x)$ حلول المعادلة المتجانسة $(1')$ على Γ_3 وتُحققان الشروط الحدية:

$$\lim_{\gamma_i \ni x \to a_{j-2}} z_{0j}(x) = \delta_{ij}, \lim_{\gamma_i \ni x \to a_{j-2}} z_{0j}'(x) = 0\ , j = 4,5 \tag{12_2}$$

والشروط الحدية المتجانسة $(6) - (2)$ عند باقي عقد البيان Γ_2, Γ_3.

تُمثل الدوال $z_{1j}(x)$ حلول المعادلة المتجانسة $(1')$ على Γ_1 والتي تُحقق الشروط الحدية:

$$\lim_{\gamma_i \ni x \to a_j} z_{1j}(x) = \delta_{ij}, \lim_{\gamma_i \ni x \to a_j} z_{1j}'(x) = 0\ , j = 2,3 \tag{13_1}$$

والشروط الحدية المتجانسة $(6) - (2)$ عند باقي عقد البيان Γ_1.

تُمثل الدوال $z_{14}(x)$ حلول المعادلة المتجانسة $(1')$ على Γ_2 وتمثل الدوال $z_{15}(x)$ حلول المعادلة المتجانسة $(1')$ على Γ_3 وتُحققان الشروط الحدية:

$$\lim_{\gamma_i \ni x \to a_{j-2}} z_{1j}(x) = \delta_{ij}, \lim_{\gamma_i \ni x \to a_{j-2}} z_{1j}'(x) = 0\ , j = 4,5 \tag{13_2}$$

والشروط الحدية المتجانسة $(6) - (2)$ عند باقي عقد البيان Γ_2, Γ_3.

إثبات المبرهنة (1):

نعوض العلاقة الأولى من (11) بالشرط الأول من (9) عند العقدة a_2 فنجد:

$$p_4(a_2)u_4''(a_2) + \alpha_{42}(a_2)p_2(a_2)u_2''(a_2) = p_4(a_2)[u_1(a_2)\, z_{04}''(a_2) + u_4'(a_2)z_{14}''(a_2)] + \alpha_{42}(a_2)p_2(a_2)[u_1(a_2)\, z_{02}''(a_2) + u_1(a_3)\, z_{03}''(a_2) + \alpha_{12}(a_2)z_{12}''(a_2)u_1'(a_2) + \alpha_{13}(a_3)z_{13}''(a_2)u_1'(a_3) + \alpha_{42}(a_2)z_{12}''(a_2)u_4'(a_2) + \alpha_{53}(a_3)z_{13}''(a_2)u_5'(a_3)]$$

يكون عندها:

$$(a_2)u_1(a_2) + \beta_1^1(a_2)u_1'(a_2) + \beta_1^2(a_2)u_1(a_3) + \beta_1^3(a_2, a_3)u_1'(a_3) + \beta_1^4(a_2)u_4'(a_2) + \beta_1^5(a_2, a_3)u_5'(a_3) = 0 \tag{14}$$

حيث:

$$\begin{aligned}
&\beta_1^0(a_2) = p_4(a_2)z''_{04}(a_2) + \alpha_{42}(a_2)p_2(a_2)z''_{02}(a_2)\\
&\beta_1^1(a_2) = \alpha_{12}(a_2)\,\alpha_{42}(a_2)p_2(a_2)z''_{12}(a_2)\\
&\beta_1^2(a_2) = \alpha_{42}(a_2)p_2(a_2)z''_{03}(a_2)\\
&\beta_1^3(a_2,a_3) = \alpha_{13}(a_3)\,\alpha_{42}(a_2)p_2(a_2)z''_{13}(a_2)\\
&\beta_1^4(a_2) = p_4(a_2)z''_{14}(a_2) + \alpha_{42}^2(a_2)p_2(a_2)z''_{12}(a_2)\\
&\beta_1^5(a_2,a_3) = \alpha_{53}(a_3)\,\alpha_{42}(a_2)p_2(a_2)z''_{13}(a_2)
\end{aligned} \tag{15}$$

لنهتم الآن بالعلاقة الثالثة من الشرط (9):

$$p_5(a_3)u''_5(a_3) + \alpha_{53}(a_3)p_3(a_3)u''_3(a_3) = p_5(a_3)[u_1(a_3)\,z''_{05}(a_3) + u'_5(a_3)z''_{15}(a_3)] + \alpha_{53}(a_3)p_3(a_3)[u_1(a_2)\,z''_{02}(a_3) + u_1(a_3)\,z''_{03}(a_3) + \alpha_{12}(a_2)z''_{12}(a_3)u'_1(a_2) + \alpha_{13}(a_3)z''_{13}(a_3)u'_1(a_3) + \alpha_{42}(a_2)z''_{12}(a_3)u'_4(a_2) + \alpha_{53}(a_3)z''_{13}(a_3)u'_5(a_3)]$$

يكون عندها:

$$\beta_2^0(a_3)u_1(a_2) + \beta_2^1(a_2,a_3)u'_1(a_2) + \beta_2^2(a_3)u_1(a_3) + \beta_2^3(a_3)u'_1(a_3) + \beta_2^4(a_2,a_3)u'_4(a_2) + \beta_2^5(a_3)u'_5(a_3) = 0 \tag{16}$$

حيث:

$$\begin{aligned}
&\beta_2^0(a_3) = \alpha_{53}(a_3)p_3(a_3)z''_{02}(a_3)\\
&\beta_2^1(a_2,a_3) = \alpha_{12}(a_2)\,\alpha_{53}(a_3)p_3(a_3)z''_{12}(a_3)\\
&\beta_2^2(a_3) = p_5(a_3)z''_{05}(a_3) + \alpha_{53}(a_3)p_3(a_3)z''_{03}(a_3)\\
&\beta_2^3(a_3) = \alpha_{13}(a_3)\,\alpha_{53}(a_3)p_3(a_3)z''_{13}(a_3)\\
&\beta_2^4(a_2,a_3) = \alpha_{42}(a_2)\alpha_{53}(a_3)p_3(a_3)z''_{12}(a_3)\\
&\beta_2^5(a_3) = p_5(a_3)z''_{15}(a_3) + \alpha_{53}^2(a_3)p_3(a_3)z''_{13}(a_3)
\end{aligned} \tag{17}$$

نحل جملة المعادلتين (14) و (16) بالنسبة لـ $u'_4(a_2), u'_5(a_3)$ لذلك نرمز:

$$\Delta(a_2,a_3) = \begin{vmatrix} \beta_1^4(a_2) & \beta_1^5(a_2,a_3) \\ \beta_2^4(a_2,a_3) & \beta_2^5(a_3) \end{vmatrix}$$

وبفرض: $\Delta(a_2,a_3) \neq 0$ (ستبرهن لاحقاً)يكون عندها:

$$u'_4(a_2) = -\frac{\Delta_1^0(a_2,a_3)}{\Delta(a_2,a_3)}u_1(a_2) - \frac{\Delta_1^1(a_2,a_3)}{\Delta(a_2,a_3)}u'_1(a_2) - \frac{\Delta_1^2(a_2,a_3)}{\Delta(a_2,a_3)}u_1(a_3) - \frac{\Delta_1^3(a_2,a_3)}{\Delta(a_2,a_3)}u'_1(a_3) \tag{18$_1$}$$

$$u'_5(a_3) = -\frac{\Delta_2^0(a_2,a_3)}{\Delta(a_2,a_3)}u_1(a_2) - \frac{\Delta_2^1(a_2,a_3)}{\Delta(a_2,a_3)}u'_1(a_2) - \frac{\Delta_2^2(a_2,a_3)}{\Delta(a_2,a_3)}u_1(a_3) - \frac{\Delta_2^3(a_2,a_3)}{\Delta(a_2,a_3)}u'_1(a_3) \tag{18$_2$}$$

حيث:

$$\Delta_1^i(a_2,a_3)=\begin{vmatrix}\beta_1^{i} & \beta_1^5\\ \beta_2^{i} & \beta_2^5\end{vmatrix},\Delta_2^i(a_2,a_3)=\begin{vmatrix}\beta_1^4 & \beta_1^{i}\\ \beta_2^4 & \beta_2^{i}\end{vmatrix};\ i=\{0,1,2,3\}$$

ننتقل الآن للعلاقة الثانية من الشرط (9) لنجد:

$$\begin{aligned}&p_1(a_2)u_1''(a_2)+\alpha_{12}(a_2)p_2(a_2)u_2''(a_2)=\\&p_1(a_2)u_1''(a_2)+\alpha_{12}(a_2)p_2(a_2)[u_1(a_2)\ z_{02}''(a_2)+u_1(a_3)\ z_{03}''(a_2)+\\&\alpha_{12}(a_2)z_{12}''(a_2)u_1'(a_2)+\alpha_{13}(a_3)z_{13}''(a_2)u_1'(a_3)+\alpha_{42}(a_2)z_{12}''(a_2)u_4'(a_2)+\\&\alpha_{53}(a_3)z_{13}''(a_2)u_5'(a_3)]\end{aligned}$$

يكون عندها:

$$\begin{aligned}&p_1(a_2)u_1''(a_2)+\beta_3^0(a_2)u_1(a_2)+\beta_3^1(a_2)u_1'(a_2)+\beta_3^2(a_2)u_1(a_3)+\\&\beta_3^3(a_2,a_3)u_1'(a_3)+\beta_3^4(a_2)u_4'(a_2)+\beta_3^5(a_2,a_3)u_5'(a_3)=0\end{aligned}\tag{19}$$

حيث:

$$\begin{aligned}&\beta_3^0(a_2)=\alpha_{12}(a_2)p_2(a_2)z_{02}''(a_2)\\&\beta_3^1(a_2)=\alpha_{12}^2(a_2)\ p_2(a_2)z_{12}''(a_2)\\&\beta_3^2(a_2)=\alpha_{12}(a_2)p_2(a_2)z_{03}''(a_2)\\&\beta_3^3(a_2,a_3)=\alpha_{13}(a_3)\ \alpha_{12}(a_2)p_2(a_2)z_{13}''(a_2)\\&\beta_3^4(a_2)=\alpha_{42}(a_2)\alpha_{12}(a_2)p_2(a_2)z_{12}''(a_2)\\&\beta_3^5(a_2,a_3)=\alpha_{53}(a_3)\alpha_{12}(a_2)p_2(a_2)z_{13}''(a_2)\end{aligned}\tag{20}$$

تُصبح للمعادلة الشكل التالي:

$$\begin{aligned}&p_1(a_2)u_1''(a_2)+\lambda_1^0(a_2,a_3)u_1(a_2)+\lambda_1^1(a_2,a_3)u_1'(a_2)+\\&\lambda_1^2(a_2,a_3)u_1(a_3)+\lambda_1^3(a_2,a_3)u_1'(a_3)=0\end{aligned}\tag{21}$$

حيث:

$$\begin{aligned}&\lambda_1^0(a_2,a_3)=\left(\beta_3^0-\beta_3^4\ \frac{\Delta_1^0}{\Delta}-\beta_3^5\ \frac{\Delta_2^0}{\Delta}\right)(a_2,a_3)\\&\lambda_1^1(a_2,a_3)=\left(\beta_3^1-\beta_3^4\ \frac{\Delta_1^1}{\Delta}-\beta_3^5\ \frac{\Delta_2^1}{\Delta}\right)(a_2,a_3)\\&\lambda_1^2(a_2,a_3)=\left(\beta_3^2-\beta_3^4\ \frac{\Delta_1^2}{\Delta}-\beta_3^5\ \frac{\Delta_2^2}{\Delta}\right)(a_2,a_3)\\&\lambda_1^3(a_2,a_3)=\left(\beta_3^3-\beta_3^4\ \frac{\Delta_1^3}{\Delta}-\beta_3^5\ \frac{\Delta_2^3}{\Delta}\right)(a_2,a_3)\end{aligned}\tag{22}$$

نعيد ما سبق على العلاقة الأخيرة من (9) فنجد المعادلة:

$$\begin{aligned}&p_1(a_3)u_1''(a_3)+\lambda_2^0(a_2,a_3)u_1(a_2)+\lambda_2^1(a_2,a_3)u_1'(a_2)+\\&\lambda_2^2(a_2,a_3)u_1(a_3)+\lambda_2^3(a_2,a_3)u_1'(a_3)=0\end{aligned}\tag{23}$$

حيث:

$$\lambda_2^0(a_2,a_3) = \left(\beta_4^0 - \beta_4^4\,\frac{\Delta_1^0}{\Delta} - \beta_4^5\,\frac{\Delta_2^0}{\Delta}\right)(a_2,a_3)$$
$$\lambda_2^1(a_2,a_3) = \left(\beta_4^1 - \beta_4^4\,\frac{\Delta_1^1}{\Delta} - \beta_4^5\,\frac{\Delta_2^1}{\Delta}\right)(a_2,a_3)$$
$$\lambda_2^2(a_2,a_3) = \left(\beta_4^2 - \beta_4^4\,\frac{\Delta_1^2}{\Delta} - \beta_4^5\,\frac{\Delta_2^2}{\Delta}\right)(a_2,a_3) \qquad (24)$$
$$\lambda_2^3(a_2,a_3) = \left(\beta_4^3 - \beta_4^4\,\frac{\Delta_1^3}{\Delta} - \beta_4^5\,\frac{\Delta_2^3}{\Delta}\right)(a_2,a_3)$$

حيث:

$$\beta_4^0(a_3) = \alpha_{13}(a_3)p_3(a_3)z''_{02}(a_3)$$
$$\beta_4^1(a_2,a_3) = \alpha_{12}(a_2)\alpha_{13}(a_3)\,p_3(a_3)z''_{12}(a_3)$$
$$\beta_4^2(a_3) = \alpha_{13}(a_3)p_3(a_3)z''_{03}(a_3) \qquad (25)$$
$$\beta_4^3(a_3) = \alpha_{13}^2(a_3)p_3(a_3)z''_{13}(a_3)$$
$$\beta_4^4(a_2,a_3) = \alpha_{42}(a_2)\alpha_{13}(a_3)p_3(a_3)z''_{12}(a_3)$$
$$\beta_4^5(a_3) = \alpha_{13}(a_3)\alpha_{53}(a_3)p_3(a_3)z''_{13}(a_3)$$

نبدأ الآن بالعلاقة الأولى من الشرط (10):

$$D^3u_1(a_2) + D^3u_2(a_2) + D^3u_4(a_2) = D^3u_1(a_2) + D^3z_{02}(a_2)u_1(a_2) + \alpha_{12}(a_2)D^3z_{12}(a_2)u'_1(a_2) + D^3z_{03}(a_2)u_1(a_3) + \alpha_{13}(a_3)D^3z_{13}(a_2)u'_1(a_3) + \alpha_{42}(a_2)D^3z_{12}(a_2)u'_4(a_2) + \alpha_{53}(a_3)D^3z_{13}(a_2)u'_5(a_3) + D^3z_{04}(a_2)u_1(a_2) + D^3z_{14}(a_2)u'_4(a_2)$$

تصبح المعادلة بالشكل:

$$D^3u_1(a_2) + \delta_1^0(a_2)u_1(a_2) + \delta_1^1(a_2)u'_1(a_2) + \delta_1^2(a_2)u_1(a_3) + \delta_1^3(a_2,a_3)u'_1(a_3) + \delta_1^4(a_2)u'_4(a_2) + \delta_1^5(a_2,a_3)u'_5(a_3) = 0$$

حيث:

$$\delta_1^0(a_2) = D^3z_{02}(a_2) + D^3z_{04}(a_2)$$
$$\delta_1^1(a_2) = \alpha_{12}(a_2)D^3z_{12}(a_2) \qquad (26_1)$$
$$\delta_1^2(a_2) = D^3z_{03}(a_2)$$
$$\delta_1^3(a_2,a_3) = \alpha_{13}(a_3)D^3z_{13}(a_2)$$
$$\delta_1^4(a_2) = D^3z_{14}(a_2) + \alpha_{42}(a_2)D^3z_{12}(a_2) \qquad (26_2)$$
$$\delta_1^5(a_2,a_3) = \alpha_{53}(a_3)D^3z_{13}(a_2)$$

نعوض العلاقات (18) في العلاقة السابقة فنجد:

$$D^3u_1(a_2) + \rho_1^0(a_2,a_3)u_1(a_2) + \rho_1^1(a_2,a_3)u'_1(a_2) + \rho_1^2(a_2,a_3)u_1(a_3) + \rho_1^3(a_2,a_3)u'_1(a_3) = 0 \qquad (27)$$

حيث:

$$\begin{aligned}
\rho_1^0(a_2,a_3) &= \left(\delta_1^0 - \delta_1^4\,\frac{\Delta_1^0}{\Delta} - \delta_1^5\,\frac{\Delta_2^0}{\Delta}\right)(a_2,a_3)\\
\rho_1^1(a_2,a_3) &= \left(\delta_1^1 - \delta_1^4\,\frac{\Delta_1^1}{\Delta} - \delta_1^5\,\frac{\Delta_2^1}{\Delta}\right)(a_2,a_3)\\
\rho_1^2(a_2,a_3) &= \left(\delta_1^2 - \delta_1^4\,\frac{\Delta_1^2}{\Delta} - \delta_1^5\,\frac{\Delta_2^2}{\Delta}\right)(a_2,a_3)\\
\rho_1^3(a_2,a_3) &= \left(\delta_1^3 - \delta_1^4\,\frac{\Delta_1^3}{\Delta} - \delta_1^5\,\frac{\Delta_2^3}{\Delta}\right)(a_2,a_3)
\end{aligned} \tag{28}$$

نعيد العلاقة الثانية من الشرط (10) فنجد:

$$\begin{aligned}
&D^3u_1(a_3) + \rho_2^0(a_2,a_3)u_1(a_2) + \rho_2^1(a_2,a_3)u_1'(a_2) +\\
&\rho_2^2(a_2,a_3)u_1(a_3) + \rho_2^3(a_2,a_3)u_1'(a_3) = 0
\end{aligned} \tag{29}$$

حيث:

$$\begin{aligned}
\rho_2^0(a_2,a_3) &= \left(\delta_2^0 - \delta_2^4\,\frac{\Delta_1^0}{\Delta} - \delta_2^5\,\frac{\Delta_2^0}{\Delta}\right)(a_2,a_3)\\
\rho_2^1(a_2,a_3) &= \left(\delta_2^1 - \delta_2^4\,\frac{\Delta_1^1}{\Delta} - \delta_2^5\,\frac{\Delta_2^1}{\Delta}\right)(a_2,a_3)\\
\rho_2^2(a_2,a_3) &= \left(\delta_2^2 - \delta_2^4\,\frac{\Delta_1^2}{\Delta} - \delta_2^5\,\frac{\Delta_2^2}{\Delta}\right)(a_2,a_3)\\
\rho_2^3(a_2,a_3) &= \left(\delta_2^3 - \delta_2^4\,\frac{\Delta_1^3}{\Delta} - \delta_2^5\,\frac{\Delta_2^3}{\Delta}\right)(a_2,a_3)
\end{aligned} \tag{30}$$

حيث:

$$\begin{aligned}
&\delta_2^0(a_2) = D^3z_{02}(a_3)\\
&\delta_2^1(a_2,a_3) = \alpha_{12}(a_2)D^3z_{12}(a_3) \qquad (31_1)\\
&\delta_2^2(a_3) = D^3z_{05}(a_3) + D^3z_{03}(a_3)\\
&\delta_2^3(a_3) = \alpha_{13}(a_3)D^3z_{13}(a_3)\\
&\delta_2^4(a_2,a_3) = \alpha_{42}(a_2)D^3z_{12}(a_3) \qquad (31_2)\\
&\delta_2^5(a_3) = D^3z_{15}(a_3) + \alpha_{53}(a_3)D^3z_{13}(a_3)
\end{aligned}$$

ولما كان الاتجاه المأخوذ على الضلع $\gamma_1 = (a_3,a_2)$ من a_3 إلى a_2 و الاتجاه المأخوذ في العمل هو "إلى العقدة".

وبالتالي نكون قد أثبتنا أنَّ المسألة (1)-(6) تُكافئ المسألة التالية:

$$\begin{aligned}
&Lu \equiv (p(x)u'')'' - (q(x)u')' = f(x)\ ;\ x \in \gamma_1\\
&p_1(a_2)u_1''(a_2) + \lambda_1^0(a_2,a_3)u_1(a_2) + \lambda_1^1(a_2,a_3)u_1'(a_2)\\
&\qquad + \lambda_1^2(a_2,a_3)u_1(a_3) - \lambda_1^3(a_2,a_3)u_1'(a_3) = 0
\end{aligned} \tag{32}$$

$$p_1(a_3)u_1''(a_3)+\lambda_2^0(a_2,a_3)u_1(a_2)+\lambda_2^1(a_2,a_3)u_1'(a_2) \\ +\lambda_2^2(a_2,a_3)u_1(a_3)-\lambda_2^3(a_2,a_3)u_1'(a_3)=0$$
$$D^3u_1(a_2)+\rho_1^0(a_2,a_3)u_1(a_2)+\rho_1^1(a_2,a_3)u_1'(a_2) \\ +\rho_1^2(a_2,a_3)u_1(a_3)-\rho_1^3(a_2,a_3)u_1'(a_3)=0$$
$$D^3u_1(a_3)-\rho_2^0(a_2,a_3)u_1(a_2)-\rho_2^1(a_2,a_3)u_1'(a_2) \\ -\rho_2^2(a_2,a_3)u_1(a_3)+\rho_2^3(a_2,a_3)u_1'(a_3)=0$$

إثبات طريقة التخفيض:

حتى نستطيع إثبات أن $\Delta(a_2,a_3)\neq 0$، علينا إثبات بعض خواص الدوال $z_{02}(x),z_{03}(x),z_{04}(x),z_{05}(x),z_{12}(x),z_{13}(x),z_{14}(x),z_{15}(x)$ المعرفة بالعلاقات (12), (13).

تمهيدية 3: لنفرض أن الدوال $z_{0i}(x),z_{0j}(x)$ هي حلول للمعادلة المتجانسة $(1')$ على $\tilde{\Gamma}$ تُحقق إما الشروط الحدية (12_1) عند العقدتين $a_2,a_3\in\partial\tilde{\Gamma}\ ;\ \tilde{\Gamma}=\Gamma_1$ أو الشروط الحدية (12_2) عند العقدة $a_k\in\partial\tilde{\Gamma}\ ;\ \tilde{\Gamma}=\Gamma_k\ ; k=2,3$ والشروط المتجانسة $(2)-(6)$ عند باقي عقد البيان $\tilde{\Gamma}$ حيث $i,j=2,3,4,5$. ولنفرض أيضاً أن الدوال $z_{1i}(x),z_{j3}(x)$ هي حلول للمعادلة المتجانسة $(1')$ على $\tilde{\Gamma}$ تُحقق إما الشروط الحدية (13_1) عند العقدتين $a_2,a_3\in\partial\tilde{\Gamma}\ ;\ \tilde{\Gamma}=\Gamma_1$ أوالشروط الحدية (13_2) عند العقدة $a_k\in\partial\tilde{\Gamma}\ ;\ \tilde{\Gamma}=\Gamma_k\ ; k=2,3$ والشروط المتجانسة $(2)-(6)$ عند باقي عقد البيان $\tilde{\Gamma}$ حيث $i,j=2,3,4,5$.

عندئذٍ تكون الخواص التالية محققة:

1. $z_{12}''(a_2)>0, z_{13}''(a_3)>0, z_{14}''(a_2)>0, z_{15}''(a_3)>0$
2. $D^3z_{02}(a_2)<0, D^3z_{03}(a_3)<0, D^3z_{04}(a_2)<0, D^3z_{05}(a_3)<0$
3. $D^3z_{12}(a_2)=-p_2(a_2)z_{02}''(a_2), D^3z_{13}(a_3)=-p_3(a_3)z_{03}''(a_3)$
   $D^3z_{12}(a_3)=-p_2(a_2)z_{03}''(a_2), D^3z_{13}(a_2)=-p_3(a_3)z_{02}''(a_3)$
   $D^3z_{14}(a_2)=-p_4(a_2)z_{04}''(a_2), D^3z_{15}(a_3)=-p_5(a_3)z_{05}''(a_3)$
   $p_2(a_2)z_{13}''(a_2)=p_3(a_3)z_{12}''(a_3)$
4. $|p_2(a_2)z_{13}''(a_2)|=|p_3(a_3)z_{12}''(a_3)|\leq\sqrt{p_2(a_2)z_{12}''(a_2)p_3(a_3)z_{13}''(a_3)}$

الإثبات: لنرمز بـ:

$$B[u,v]=\int_{\tilde{\Gamma}}[pu'v'+quv]dx$$

$$\int_{\tilde{\Gamma}}Lz_{12}\cdot z_{12}dx=B[z'_{12},z'_{12}]+\underset{\gamma_2\ni x\to a_2}{Lim}[D^3z_{12}\cdot z_{12}-p_2\,z_{12}''\cdot z_{12}']+ \\ +\underset{\gamma_3\ni x\to a_3}{Lim}[D^3z_{12}\cdot z_{12}-p_3\,z_{12}''\cdot z_{12}']$$

من الشروط (12) و (13) ومن العلاقة السابقة نجد (بنفس الأسلوب نثبت باقي العلاقات)

$$\int_{\widetilde{\Gamma}} Lz_{12} \cdot z_{12}\, dx = -p_2(a_2)z''_{12}(a_2) + B[\mathrm{z}'_{12}, \mathrm{z}'_{12}] = 0 \qquad (33_1)$$

$$\int_{\widetilde{\Gamma}} Lz_{02} \cdot z_{02}\, dx = D^3 z_{02}(a_2) + B[\mathrm{z}'_{02}, \mathrm{z}'_{02}] = 0 \qquad (33_2)$$

$$\int_{\widetilde{\Gamma}} Lz_{02} \cdot z_{12}\, dx = -p_2(a_2)z''_{02}(a_2) + B[\mathrm{z}'_{02}, \mathrm{z}'_{12}] = 0 \qquad (33_3)$$

$$\int_{\widetilde{\Gamma}} Lz_{12} \cdot z_{02}\, dx = D^3 z_{12}(a_2) + B[\mathrm{z}'_{12}, \mathrm{z}'_{02}] = 0 \qquad (33_4)$$

$$\int_{\widetilde{\Gamma}} Lz_{13} \cdot z_{02}\, dx = D^3 z_{13}(a_2) + B[\mathrm{z}'_{12}, \mathrm{z}'_{02}] = 0 \qquad (33_5)$$

$$\int_{\widetilde{\Gamma}} Lz_{02} \cdot z_{13}\, dx = -p_3(a_3)z''_{02}(a_3) + B[\mathrm{z}'_{12}, \mathrm{z}'_{02}] = 0 \qquad (33_6)$$

$$\int_{\widetilde{\Gamma}} Lz_{12} \cdot z_{03}\, dx = D^3 z_{12}(a_3) + B[\mathrm{z}'_{12}, \mathrm{z}'_{02}] = 0 \qquad (33_7)$$

$$\int_{\widetilde{\Gamma}} Lz_{03} \cdot z_{12}\, dx = -p_2(a_2)z''_{03}(a_2) + B[\mathrm{z}'_{12}, \mathrm{z}'_{02}] = 0 \qquad (33_8)$$

$$\int_{\widetilde{\Gamma}} Lz_{13} \cdot z_{03}\, dx = D^3 z_{13}(a_3) + B[\mathrm{z}'_{12}, \mathrm{z}'_{02}] = 0 \qquad (33_9)$$

$$\int_{\widetilde{\Gamma}} Lz_{03} \cdot z_{13}\, dx = -p_3(a_3)z''_{03}(a_3) + B[\mathrm{z}'_{12}, \mathrm{z}'_{02}] = 0 \qquad (33_{10})$$

$$\int_{\widetilde{\Gamma}} Lz_{13} \cdot z_{13}\, dx = -p_3(a_3)z''_{13}(a_3) + B[\mathrm{z}'_{13}, \mathrm{z}'_{13}] = 0 \qquad (33_{11})$$

$$\int_{\widetilde{\Gamma}} Lz_{03} \cdot z_{03}\, dx = D^3 z_{03}(a_3) + B[\mathrm{z}'_{03}, \mathrm{z}'_{03}] = 0 \qquad (33_{12})$$

$$\int_{\widetilde{\Gamma}} Lz_{12} \cdot z_{13}\, dx = -p_3(a_3)z''_{12}(a_3) + B[\mathrm{z}'_{12}, \mathrm{z}'_{13}] = 0 \qquad (33_{13})$$

$$\int_{\widetilde{\Gamma}} Lz_{13} \cdot z_{12}\, dx = -p_2(a_2)z''_{13}(a_2) + B[\mathrm{z}'_{13}, \mathrm{z}'_{12}] = 0 \qquad (33_{14})$$

لما كانَ $p(x) > 0$ و $q(x) \geq 0$ ، أيضاً تُعرف $B[u, v]$ جداء داخلي على فضاء سوبيلف $W^{1,2}[\Gamma]$. إنَّ $B[\mathrm{z}'_{12}, \mathrm{z}'_{12}]$ موجب تماماً وذلك لأنَّ $\mathrm{z}'_{12}(x) \neq 0$، وبالتالي من المعادلة (33_1) نجد $\mathrm{z}''_{12}(a_1) > 0$، بنفس الأسلوب يُمكننا برهان 1 و 2 باستخدام المعادلات $(33_2), (33_{11}), (33_{12})$ (لكن في المعادلة (33_2) علينا ملاحظة أن $z_{02}(a_2) = 1$ و $z_{02}(a_3) = 0$، وبالتالي $\mathrm{z}'_{02}(x) \not\equiv 0$ على كامل $\widetilde{\Gamma}$).

لننتقل الآن إلى إثبات 3 (سنثبت الآن العلاقة الأولى وتثبت باقي العلاقات بنفس الأسلوب) بطرح العلاقتين $(33_3) - (33_4)$ و ملاحظة أنَّ $B[z'_{12}, z'_{02}] = B[z'_{02}, z'_{12}]$ نجد:

$$D^3 z_{12}(a_2) + p_2(a_2)z''_{02}(a_2) = 0$$

لننتقل الآن إلى إثبات 4، باستخدام متراجحة كوشي- شوارتز والعلاقات $(33_{13}),(33_{14})$ نصل للمتراجحة التالية:

$$|p_3(a_3)z_{12}''(a_3)| = |p_2(a_2)z_{13}''(a_2)| = B[z_{12}', z_{13}'] \leq \sqrt{B[z_{12}', z_{02}']\, B[z_{13}', z_{13}']} = \sqrt{p_2(a_2)z_{12}''(a_2)p_3(a_3)z_{13}''(a_3)}$$

مبرهنة (2) إنَّ العدد $\Delta(\boldsymbol{a_2}, \boldsymbol{a_3})$ موجب تماماً.

الإثبات: نعلم أنَّ: ومن العلاقات (15) و (17) نجد:

$$\Delta(a_2, a_3) = \begin{vmatrix} \beta_1^4(a_2) & \beta_1^5(a_2, a_3) \\ \beta_2^4(a_2, a_3) & \beta_2^5(a_3) \end{vmatrix} = \beta_1^4\beta_2^5 - \beta_2^4\beta_1^5 = \big(p_4(a_2)z_{14}''(a_2) + \alpha_{42}^2(a_2)p_2(a_2)z_{12}''(a_2)\big)\Big(p_5(a_3)z_{15}''(a_3) + \alpha_{53}^2(a_3)p_3(a_3)z_{13}''(a_3)\Big) - \alpha_{42}^2(a_2)\alpha_{53}^2(a_3)p_2(a_2)z_{13}''(a_2)p_3(a_3)z_{12}''(a_3) =$$
$$p_4(a_2)z_{14}''(a_2)p_5(a_3)z_{15}''(a_3) + \alpha_{42}^2(a_2)p_2(a_2)z_{12}''(a_2)p_5(a_3)z_{15}''(a_3) + \alpha_{53}^2(a_3)p_3(a_3)z_{13}''(a_3)p_4(a_2)z_{14}''(a_2) + \alpha_{42}^2(a_2)\alpha_{53}^2(a_3)\big(p_2(a_2)z_{12}''(a_2)p_3(a_3)z_{13}''(a_3) - p_2(a_2)z_{13}''(a_2)p_3(a_3)z_{12}''(a_3)\big)$$

ومن التمهيدية 3 نجد أن كل من الأعداد الآتية موجب تماماً:

$$p_5(a_3)z_{15}''(a_3), p_4(a_2)z_{14}''(a_2), p_2(a_2)z_{12}''(a_2), p_3(a_3)z_{13}''(a_3)$$

بالإضافة إلى ذلك يتحقق:

$$|p_2(a_2)z_{13}''(a_2)| \leq \sqrt{p_2(a_2)z_{12}''(a_2)p_3(a_3)z_{13}''(a_3)}, |p_2(a_2)z_{12}''(a_3)| \leq \sqrt{p_2(a_2)z_{12}''(a_2)p_3(a_3)z_{13}''(a_3)}$$

وكذلك من الشروط الطبيعية: $p(a_2), p(a_3)$ أعداد موجبة تماماً.

وعليهُ نجد: $\Delta(a_2, a_3) > 0$

مبرهنة 3: إذا تحققت الشروط (21) & (23) فعندها يتحقق $\boldsymbol{\lambda_1^1(a_2, a_3) > 0}$ و $\boldsymbol{\lambda_2^3(a_2, a_3) > 0}$.

الإثبات: من العلاقات (22) نجد:

$$\lambda_1^1.\Delta = \beta_3^1\Delta - \beta_3^4\, \Delta_1^1 - \beta_3^5\, \Delta_2^1$$
$$= \alpha_{12}^2(a_2)p_2(a_2)z_{12}''(a_2)p_4(a_2)z_{14}''(a_2)p_5(a_3)z_{15}''(a_3)$$
$$+ \alpha_{12}^2(a_2)\alpha_{42}^2(a_2)\big(p_2(a_2)z_{12}''(a_2)\big)^2 p_5(a_3)z_{15}''(a_3)$$
$$+ \alpha_{12}^2(a_2)\alpha_{53}^2(a_3)p_2(a_2)z_{12}''(a_2)p_3(a_3)z_{13}''(a_3)p_4(a_2)z_{14}''(a_2)$$
$$+ \alpha_{12}^2(a_2)\alpha_{42}^2(a_2)\alpha_{53}^2(a_3)\big(p_2(a_2)z_{12}''(a_2)\big)^2 p_3(a_3)z_{13}''(a_3)$$
$$- \alpha_{12}^2(a_2)\alpha_{42}^2(a_2)\alpha_{53}^2(a_3)p_2(a_2)z_{12}''(a_2)p_2(a_2)z_{13}''(a_2)p_3(a_3)z_{12}''(a_3)$$

$$-\alpha_{12}^2(a_2)\alpha_{42}^2(a_2)\left(p_2(a_2)z_{12}''(a_2)\right)^2 p_5(a_3)z_{15}''(a_3)$$
$$-\alpha_{12}^2(a_2)\alpha_{42}^2(a_2)\alpha_{53}^2(a_3)\left(p_2(a_2)z_{12}''(a_2)\right)^2 p_3(a_3)z_{13}''(a_3)$$
$$+\alpha_{12}^2(a_2)\alpha_{42}^2(a_2)\alpha_{53}^2(a_3)p_2(a_2)z_{12}''(a_2)p_2(a_2)z_{13}''(a_2)p_3(a_3)z_{12}''(a_3)$$
$$-\alpha_{12}^2(a_2)\alpha_{53}^2(a_3)p_2(a_2)z_{13}''(a_2)p_3(a_3)z_{12}''(a_3)p_4(a_2)z_{14}''(a_2)$$
$$-\alpha_{12}^2(a_2)\alpha_{42}^2(a_2)\alpha_{53}^2(a_3)p_2(a_2)z_{12}''(a_2)p_2(a_2)z_{13}''(a_2)p_3(a_3)z_{12}''(a_3)$$
$$+\alpha_{12}^2(a_2)\alpha_{42}^2(a_2)\alpha_{53}^2(a_3)p_2(a_2)z_{12}''(a_2)p_2(a_2)z_{13}''(a_2)p_3(a_3)z_{12}''(a_3)$$

نختصر فنجد:

$$\lambda_1^1.\Delta= \alpha_{12}^2(a_2)p_2(a_2)z_{12}''(a_2)p_4(a_2)z_{14}''(a_2)p_5(a_3)z_{15}''(a_3)+ \alpha_{42}^2(a_2)\alpha_{53}^2(a_3)p_4(a_2)z_{14}''(a_2)\left(p_2(a_2)z_{12}''(a_2)p_3(a_3)z_{13}''(a_3)- p_2(a_2)z_{13}''(a_2)p_3(a_3)z_{12}''(a_3)\right)$$

ولما كان: $\alpha_{12}(a_2)<0$ ومن التمهيدية 3 نجد:

$$\lambda_1^1(a_2,a_3).\Delta(a_2,a_3)>0$$

ومن المبرهنة 2 نجد: $\lambda_1^1(a_2,a_3)>0$.

نثبت أنَّ $\lambda_2^3(a_2,a_3)>0$ بأسلوب مماثل بالاعتماد على العلاقات (24).

مبرهنة (4) إذا تحققت الشروط (21) & (23) فعندها تتحقق كل من العلاقات الآتية:

$$\lambda_1^0(a_2,a_3)=-\rho_1^1(a_2,a_3),\lambda_2^0(a_2,a_3)=-\rho_1^3(a_2,a_3),\lambda_1^2(a_2,a_3)=-\rho_2^1(a_2,a_3)$$
$$\lambda_2^2(a_2,a_3)=-\rho_2^3(a_2,a_3),\lambda_2^1(a_2,a_3)=\lambda_1^3(a_2,a_3),\rho_2^0(a_2,a_3)=\rho_1^2(a_2,a_3)$$

الإثبات: نثبت أولاً: $\boldsymbol{\lambda_1^0(a_2,a_3)=-\rho_1^1(a_2,a_3)}$.

من العلاقات (15)- (17) - (20) - (26) ومن التمهيدية 3 نجد:

$$\beta_1^1=\beta_3^4,\beta_2^1=\beta_3^5,\beta_1^5=\beta_2^4$$
$$\beta_1^0=-\delta_1^4,\beta_2^0=-\delta_1^5,\beta_3^0=-\delta_1^1$$

$$\lambda_1^0(a_2,a_3)\,\Delta(a_2,a_3)=\beta_3^0.\Delta-\beta_3^4.\Delta_1^0-\beta_3^5.\Delta_2^0=-\delta_1^1\Delta-\beta_1^1\begin{vmatrix}\beta_1^0 & \beta_1^5\\ \beta_2^0 & \beta_2^5\end{vmatrix}-\beta_2^1\begin{vmatrix}\beta_1^4 & \beta_1^0\\ \beta_2^4 & \beta_2^0\end{vmatrix}=-\delta_1^1\Delta+\beta_1^1\begin{vmatrix}\delta_1^4 & \beta_1^5\\ \delta_1^5 & \beta_2^5\end{vmatrix}+\beta_2^1\begin{vmatrix}\beta_1^4 & \delta_1^4\\ \beta_2^4 & \delta_1^5\end{vmatrix}=-\delta_1^1\Delta+\delta_1^4\left(\beta_1^1\beta_2^5-\beta_2^1\beta_2^4\right)+\delta_1^5\left(\beta_1^1\beta_1^5-\beta_2^1\beta_1^4\right)=-\delta_1^1\Delta+\delta_1^4\left(\beta_1^1\beta_2^5-\beta_2^1\beta_1^5\right)+\delta_1^5\left(\beta_1^1\beta_2^4-\beta_2^1\beta_1^4\right)=-\delta_1^1\Delta+\delta_1^4\begin{vmatrix}\beta_1^1 & \beta_1^5\\ \beta_2^1 & \beta_2^5\end{vmatrix}+\delta_1^5\begin{vmatrix}\beta_1^4 & \beta_1^1\\ \beta_2^4 & \beta_2^1\end{vmatrix}=-\left(\delta_1^1.\Delta-\delta_1^4.\Delta_1^1-\delta_1^5.\Delta_2^1\right)=-\rho_1^1(a_2,a_3)\,\Delta(a_2,a_3)$$

ومن المبرهنة 2 نجد: $\lambda_1^0(a_2,a_3)=-\rho_1^1(a_2,a_3)$.

لننتقل الآن إلى إثبات $\lambda_2^1(a_2,a_3)=\lambda_1^3(a_2,a_3)$

من العلاقات (15) - (20) - (25) ومن التمهيدية 3 نجد:

$$\beta_1^1=\beta_3^4,\beta_2^1=\beta_3^5,\beta_1^5=\beta_2^4,\beta_1^3=\beta_4^4,\beta_2^3=\beta_4^5,\beta_4^1=\beta_3^3$$

$$\lambda_2^1(a_2,a_3)\,\Delta(a_2,a_3)=\beta_4^1.\Delta-\beta_4^4.\Delta_1^1-\beta_4^5.\Delta_2^1=\beta_3^3\Delta-\beta_1^3\begin{vmatrix}\beta_1^1 & \beta_1^5\\ \beta_2^1 & \beta_2^5\end{vmatrix}-$$
$$\beta_2^3\begin{vmatrix}\beta_1^4 & \beta_1^1\\ \beta_2^4 & \beta_2^1\end{vmatrix}=\beta_3^3\Delta-\beta_1^3\left(\beta_1^1\beta_2^5-\beta_2^1\beta_1^5\right)-\beta_2^3(\beta_1^4\beta_2^1-\beta_2^4\beta_1^1)=\beta_3^3\Delta-$$
$$\beta_1^3(\beta_3^4\beta_2^5-\beta_3^5\beta_2^4)-\beta_2^3(\beta_1^4\beta_3^5-\beta_2^4\beta_3^4)=\beta_3^3\Delta-\beta_3^4(\beta_1^3\beta_2^5-\beta_2^3\beta_1^5)-$$
$$\beta_3^5(\beta_1^4\beta_2^3-\beta_2^4\beta_1^3)=\beta_3^3\Delta-\beta_3^4\begin{vmatrix}\beta_1^3 & \beta_1^5\\ \beta_2^3 & \beta_2^5\end{vmatrix}-\beta_3^5\begin{vmatrix}\beta_1^4 & \beta_1^3\\ \beta_2^4 & \beta_2^3\end{vmatrix}=$$
$$\lambda_1^3(a_2,a_3)\,\Delta(a_2,a_3)$$

ومن المبرهنة 2 نجد: $\lambda_2^1(a_2,a_3)=\lambda_1^3(a_2,a_3)$.

مثال:

ليكن Γ بيان هندسي له الشكل 1. نفرض أن أطوال كل الأضلاع متساوية وتساوي الواحد و التوجيه على الأضلاع كما يلي:

$$\gamma_1=(b_1,a_1),\gamma_{i+3}=(b_i,a_i),\gamma_2=(a_1,a_2),\gamma_3=(a_3,a_1),\gamma_4=(a_2,a_3)$$

حيث $i=\{2,3\}$ ولنهتم الآن بمسألة القيم الحدية:

$$(1+x^2)u''''(x)+4x\,u'''(x)+u''(x)=f(x)\ on\ x\in\Gamma$$
$$u(b)=0,u_v'(b)=0;\ b\in\partial\Gamma$$

تتحقق الشروط التالية عند العقد الداخلية:

$$u_i(a)=u_k(a),u_{iv}'(a)=-u_{jv}'(a)-u_{kv}'(a),-u_i''(a)+u_k''(a)=0$$
$$-u_i''(a)+u_j''(a)=0,\sum_{i\in I(a)}D^3u_v(a)=0$$

حيث $a\in J(\Gamma),i,j,k\in I(a)$، بعد إجراء الحسابات باستخدام برنامج Mathematica يُمكننا أن نجد(بعد تقريب الناتج إلى أربعة أرقام قبل الفاصلة).

$\lambda_1^1(a_2,a_3)=1.9366$	$\lambda_2^3(a_2,a_3)=1.9366$	$\rho_1^0(a_2,a_3)=-14.9792$
$\rho_2^2(a_2,a_3)=-14.9792$	$\lambda_1^0(a_2,a_3)=4.2903$	$\rho_1^1(a_2,a_3)=-4.2903$
$\lambda_2^0(a_2,a_3)=-1.1315$	$\rho_1^3(a_2,a_3)=1.1315$	$\lambda_1^2(a_2,a_3)=-1.1315$
$\rho_2^1(a_2,a_3)=1.1315$	$\lambda_2^2(a_2,a_3)=4.2903$	$\rho_2^3(a_2,a_3)=-4.2903$
$\lambda_2^1(a_2,a_3)=-0.3092$	$\lambda_1^3(a_2,a_3)=-0.3092$	$\rho_2^0(a_2,a_3)=3.5416$
$\rho_1^2(a_2,a_3)=3.5416$		

الخلاصة:

استطعنا في هذا البحث تخفيض مسألة قيم الحدية لمعادلة تفاضلية من المرتبة الرابعة على البيان الهندسي الذي يحوي حلقات إلى مسألة قيم حدية على ضلع داخلي من أضلاع البيان، كما استطعنا دراسة إشارة بعض المعاملات وكذلك إيجاد العلاقة بين هذه المعاملات.

توصيات:

يُمكننا دراسة وجود ووحدانية الحل الناتج عن طريقة التخفيض على الضلع الداخلي الذي تتم الدراسة عليه وبعدها إيجاد دالة غرين عليه ودراسة خواصها وإشارتها. وكذلك فإنه من المفيد إيجاد أسلوب نكون فيه قادرين على تعميم هذه الطريقة بحيث تُعالج أي بيان هندسي مهما كانت عدد الحلقات ومهما كان عدد الأضلاع المرتبطة بكل ضلع منه وكذلك الحالة التي تسمح لنا بالتخفيض على ضلع حدي من البيان الهندسي.

قائمة المراجع:

[1] Pokornyi, Y., Borovskikh, A. (2004). "Differential Equations on Networks (Geometric Graphs)". Journal of Mathematical Sciences. 119(6): 691-718.

[2] Pokornyi, Y., Zvereva, M.B., Shabrov, S.A. (2008). "Sturm–Lowville oscillation theory for impulsive problems". Russian Mathematical Surveys. 63(1): 109-153.

[3] Borovskikh, A., Lazarev, K. (2004). "Fourth-order differential equations on geometric graphs". Journal of Mathematical Sciences. 119(6): 719–739.

[4] Pokornyi, Y., Mustafa kulov, R. (1997). "On the Positive Inevitability of Some Boundary Value Problems for a Fourth-Order Equation". Differential Equations. 33(10):1358-1365.

[5] Mustafokulov, R., Soliev, S.K. (2014). " About one multipoint boundary-value problem". Dokl. Akad. Nauk R. T. 57(9-10): 517-927.

[6] Lagnese, J.E., Leugering, G., Schmidt, E. (1993). "Modeling of dynamic networks of thin thermoplastic beams". Mathematical Methods in the Applied Sciences. 16(5): 327–358.

[7] Kulaev, R. Ch. (2014). "Reduction Method for a Fourth-Order Equation on a Graph, Differential Equations". Differential Equations. 50(3): 292–304.

[8] Kulaev, R. Ch., Pogrebkov, A., Shabat, A., (2018). "Darboux System as Three-Dimensional Analog of Liouville Equation". Russian Mathematics, 62(12): 50-58.