Journal of Nature, Life and Applied Sciences
Volume (4), Issue (1) : 30 Mar 2020
P: 45 - 59

AJSRP
ISSN: 2522-3356

مجلة العلوم الطبيعية والحياتية والتطبيقية
المجلد (4)، العدد (1) : 30 مارس 2020م
ص: 45 - 59

Studying in Lee groups and most important examples of it (Heisenberg group)

Soha Ali Salamah

Faculty of Sciences || Al-Baath University || Syria

Abstract: In this research, we present some basic facts about Lie algebra and Lie groups. We shall require only elementary facts about the general definition and a knowledge of a few of the more basic groups, such as Euclidean groups. Then we introduce the Heisenberg group which is the most well known example from the realm of nilpotent Lie groups, and plays an important role in several branches of mathematics, such as representation theory, partial differential equations and number theory... It also offers the greatest opportunity for generalizing the remarkable results of Euclidean harmonic analysis.

Keywords: Lie Algebra, Heisenberg Algebra, Lie Group, Matrix Exponential, Heisenberg Group.

دراسة في زمر لي وأهم الأمثلة عنها (زمرة هايزنبرغ)

سهى علي سلامة

كلية العلوم || جامعة البعث || سوريا

الملّخص: قدّمنا في هذا البحث بعض الحقائق الأساسية عن جبر لي وزمر لي. وتعرّفنا على بعض الأمثلة عن زمر لي الأساسية كالزمر الإقليدية، ثم قدّمنا زمرة هايزنبرغ التي تعتبر بمثابة الزمرة الأكثر شهرة في زمر لي عديمة القوى، وتلعب دوراً هاماً في العديد من فروع الرياضيات، مثل نظرية التمثيل، المعادلات التفاضلية الجزئية، ونظرية الأعداد... إضافةً إلى أنها تُقدّم توسعاً ملحوظاً في الحصول على نتائج مهمة في التحليل التوافقي الإقليدي.

الكلمات المفتاحيّة: جبر لي، جبر هايزنبرغ، زمرة لي، أس مصفوفة، زمرة هايزنبرغ.

المقدّمة:

وفقاً للمصادر في التاريخ المبكّر لزمر لي يَعتبر Sophus Lie شتاء 1873–1874 تاريخ ميلاد نظريته للزمر المستمرة، ومع ذلك فإن Hawkins يشير إلى أن النشاط البحثي الضخم لإنشاء هذه النظرية كان خلال فترة الأربع سنوات من خريف 1869 وحتى خريف 1873.

وقد تم تطوير بعض الأفكار من قبل Felix Klein، حيث التقى Lie مع Felix Klein كلَّ يوم من 1869 إلى 1872.

خلال العام 1870 تم نشر جميع أوراق Lie باستثناء المذكرة الأولى في الدوريات النروجية، مما أعاق الاعتراف بالعمل في جميع أنحاء أوروبا.

وفي عام 1884 جاء عالم الرياضيات الألماني الشاب Friedrich Engel للعمل مع Lie في بحث منهجي لنشر نظريته عن الزمر المستمرة (Continuous Groups).

نتج عن هذا الجهد البحثي ثلاثة مجلدات نُشرت في الأعوام 1888–1890–1893.

كانت الفكرة البحثية لدى Lie هي تطوير نظرية التمثيل في المعادلات التفاضلية التي ستحقق ما فعله Evariste Galois في المعادلات الجبرية.

أظهر Lie وعلماء آخرون أن المعادلات الأكثر أهمية للدوال الخاصة وكثيرات الحدود المتعامدة ترتبط بتمثيلات زمر لي.

لقد كانت الفكرة في عمل لي المبكّر هي بناء نظرية للزمر المستمرة لتكمّل نظرية الزمر.

وقد جاءت الإضافات الهامة لنظرية الزمر المستمرة من أفكار العالم Bernhard Riemann.

وهكذا تمّ الجمع بين ثلاثة موضوعات رئيسية في الرياضيات من قبل Lie ونظريته الجديدة.

مشكلة البحث:

- التعريف بجبر لي وزمر لي الموافقة له، إضافةً إلى التعريف بأهمّ الأمثلة عن هذه الزمر.
- توضيح فكرة الانتقال من جبر لي إلى زمرة لي الموافقة له، وبالعكس.
- الوصول إلى زمرة هايزنبرغ، وتوضيح كيفية الانتقال من جبر هايزنبرغ إلى زمرة هايزنبرغ.

مواد البحث وطرائقه:

اعتمدنا في هذا البحث على توضيح التعاريف الأساسية وفق ترتيبٍ متكاملٍ وصولاً إلى تعريف الزمر التي يُعتمد عليها بشكلٍ خاص في الهندسة والفيزياء، وهي زمرة هايزنبرغ، حيث سيتم تعريفها بشكلٍ يخدم الأبحاث التي ستقوم على دور هذه الزمر في التطبيقات الرياضية والفيزيائية.

النتائج:

إنّ ما يُظهر الارتباط بين هذه الزمرة ونظرية تمثيلاتها في ميكانيك الكم هو فكرة أنّ فضاء الحالة لجسيم الكم سيكون تمثيلاً واحدياً لهذه الزمرة مع مجموعة من الانسحابات.

وبتمثيل عناصر زمرة هايزنبرغ كمؤثرات فوق الفضاء المتجهي غير المنتهي الأبعاد $L^2(\mathbb{R})$، فإنّ هذا التمثيل هو ما يحقق الاتصال بين زمرة هايزنبرغ والفيزياء.

المناقشة:

1-1 تعاريف أوليّة:

تعريف1 - 1 – 1 : الجداء ثنائي الخطية (Bilinear Product):[2]

ليكن A فضاءً متجهياً معرّفاً فوق حقل $\mathbb{K}$، الجداء ثنائي الخطية $B: A \times A \to A$ هو تطبيق يحقق لأجل $x, y, z \in A$ الخواص الآتية:

1- $B(x, y+z) = B(x, y) + B(x, z)$
2- $B(x+y, z) = B(x, z) + B(y, z)$
3- $B(c.x, d.y) = (cd)\, B(x, y)$

حيث c, d مقادير سلمية في $\mathbb{K}$.

واضح أن مصطلح الجداء ثنائي الخطية جاء من كونه خطيّاً بالنسبة لكل متغير.

تعريف 2 – 1 – 1: الجبر فوق الحقل (Algebra over a Field):[2]

الجبر هو فضاء متجهي مع جداء ثنائي الخطية.

يُقال إن الجبر تجميعي إذا حقق:

$$x(yz) = (xy)z$$

تعريف 3 – 1 – 1: جبر لي (Lie Algebra):[2, 3]

ليكن V فضاءً متجهيّاً فوق حقل $\mathbb{K}$، وليكن $[\,,\,]: V \times V \to V$ جداء ثنائي الخطية يحقق لأجل كل $x, y, z \in V$ الخواص الآتية:

1- $[x, x] = 0$

2- $[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0$ متطابقة جاكوبي

ندعو الثنائية $\mathfrak{g} := (V, [\,,\,])$ جبر لي، والجداء $[\,,\,]$ ندعوه قوس لي للجبر g (مبادل لي).

بالاعتماد على الخاصة 1 وبأخذ العلاقة:

$$0 = [x + y, x + y] = [x, x] + [x, y] + [y, x] + [y, y]$$

نحصل على العلاقة: $[x, y] = -[y, x]$

عندئذٍ نقول إن قوس لي متناظر عكسيّاً (skew symmetric).

مثال 1 – 1 – 1: [2]

المجموعة $M_n(\mathbb{K})$ وهي مجموعة كل المصفوفات $n \times n$ فوق حقل $\mathbb{K}$، هي جبر لي مع المبادل المعرّف بالشكل: $[A, B] = AB - BA$

نرمز لهذا الجبر لي بالرمز gl_n حيث gl ترمز إلى الخطية العامة (general linear).

و كذلك إذا كان V فضاءً متجهيّاً على الحقل $\mathbb{K}$، فإن $gl(V)$ هي جبر لي بالنسبة لعملية الجداء:

$$[f, g] = fg - gf$$

و يسمّى الجبر الخطي العام.

تعريف 4 – 1 – 1: جبر هايزنبرغ (Heisenberg Algebra):[2, 9]

ليكن الفضاء المتجهي $\mathbb{R}^{2n+1}$ وليكن تمثيل كل عنصر من هذا الفضاء بالشكل:

$$(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n, t) := (x, y, t)$$

عندئذٍ نجد أنّ $\mathbb{R}^{2n+1}$ هو جبر لي بالنسبة لجداء لي المعرّف على النحو:

$$[(x, y, t), (u, v, s)] = (0, 0, xv - yu)$$

يُدعى هذا الجبر بجبر هايزنبرغ، ويُرمز له بالرمز $\mathfrak{h}_n$.

تعريف5 – 1 – 1: هومومورفيزم جبر لي (Lie Algebra Homomorphism):[2]

ليكن $\mathfrak{g}, \acute{\mathfrak{g}}$ جبري لي، عندئذٍ يُدعى التطبيق الخطي $\varphi: \mathfrak{g} \to \acute{\mathfrak{g}}$ تشاكل جبور لي إذا كان:

$$\varphi([x, y]) = [\varphi(x), \varphi(y)]\ ; \forall x, y \in \mathfrak{g}$$

حيث القوس [,] في الطرف الأيسر هو قوس جبر لي $\mathfrak{g}$، في حين أن القوس [,] في الطرف الأيمن هو قوس جبر لي $\acute{\mathfrak{g}}$.

تعريف 6 – 1 – 1: تمثيل جبر لي (Lie Algebra Repsenetation):[2]

ليكن $\mathfrak{g}$ جبر لي، وليكن V فضاءً متجهياً. إن تمثيل جبر لي هو تشاكل جبر لي φ من جبر لي $\mathfrak{g}$ إلى $gl(V)$ (مجموعة كل التحويلات الخطية فوق V)، أي إذا كان $x, y \in \mathfrak{g}$ فإن تمثيل جبر لي هو التشاكل: $\varphi: \mathfrak{g} \to gl(V)$

بحيث:
$$\varphi([x,y]) = [\varphi(x), \varphi(y)]$$
$$= \varphi(x)\varphi(y) - \varphi(y)\varphi(x)$$

تعريف 7 – 1 -1: تمثيل جبر هايزنبرغ:[2]

بأخذ التطبيق $M: \mathfrak{h}_n \to M_{n+2}(\mathbb{R})$ المعطى بالصيغة:

$$M(x,y,t) = \begin{pmatrix} 0 y_1 \cdots y_n & t \\ 0\ 0 \cdots 0 & x_1 \\ \vdots \ \vdots \ \ddots \ \vdots & \vdots \\ 0\ 0 \cdots 0 & x_n \\ 0\ 0 \cdots 0 & 0 \end{pmatrix}$$

نجد أن هذا التطبيق يأخذ عنصر من جبر هايزنبرغ المعطى بالصيغة:
$$(x,y,t) = (x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n, t)$$
ويعطي مصفوفة من القياس $(n+2)^2$.

ملاحظة 1 – 1 – 1:

نلاحظ أننا في تعريف تمثيل جبر لي قلنا أن التمثيل ينقلنا إلى فضاء متجهي، وهذا لا يختلف مع تعريفنا لتمثيل جبر هايزنبرغ، حيث إن المصفوفات هي تحويلات خطية، فالمصفوفة $n \times n$ هي مؤثر خطي على $\mathbb{R}^n$، لذلك فإن التمثيل M هو تطبيق من جبر هايزنبرغ إلى مؤثر خطي على $\mathbb{R}^n$.

ملاحظة 2 – 1 – 1:[2]

التطبيق $M: \mathfrak{h}_n \to M_{n+2}(\mathbb{R})$ هو هومومورفيزم جبر لي.

تعريف 8 – 1 – 1: الزمرة:[2]

- لتكن G مجموعة غير خاليّة، ولتكن $\circ$ عملية ثنائية على G، ندعو الثنائية $(G, \circ)$ زمرة إذا حققت الشروط الآتية:
- المجموعة G مغلقة: إذا كان $g_1, g_2 \in G$ فإن $g_1 \circ g_2 \in G$ أيضاً.
- العملية $\circ$ تجميعية: لأجل $g_1, g_2, g_3 \in G$ فإنه يتحقق:
$$g_1 \circ (g_2 \circ g_3) = (g_1 \circ g_2) \circ g_3$$

- المجموعة G تحوي عنصراً حيادياً، أي إنه يوجد عنصر $e \in G$ بحيث تتحقق العلاقة: $e \circ g = g \circ e = g$ وذلك لأجل كل $g \in G$.
- كل عنصر من G له معكوس: لأجل $g \in G$ يوجد $g^{-1} \in G$ بحيث تتحقق العلاقة: $g \circ g^{-1} = g^{-1} \circ g = e$.

تعريف 9 – 1 – 1: الزمرة التبولوجية:

لتكن G مجموعة غير خالية، ولتكن $\circ$ عملية ثنائية على G، وτ تبولوجيا على هذه المجموعة. عندئذٍ نقول إن G زمرة تبولوجية إذا تحققت الشروط الآتية:

أ- $(G, \circ)$ زمرة بالمعنى الجبري.

ب- (G, τ) فضاء تبولوجي.

ج- التطبيق $f: G \times G \to G$

$(x, y) \mapsto x \circ y$ هو تطبيق مستمر.

د- التطبيق $f: G \to G$

$x \mapsto x^{-1}$ هو تطبيق مستمر، حيث x^{-1} معكوس x في الزمرة $(G, \circ)$.

1 - 2 المنطويات التفاضليّة:[4]

تعريف 1 - 2 – 1: الخارطة:

بفرض M فضاءً تبولوجياً قابلاً للفصل، نسمّي خارطة مفتوحة (خارطة) على M، الزوج المرتب (U, X) حيث U مجموعة مفتوحة جزئية من M، وX مُعرّف بالشكل:

$$X: U \to \mathbb{R}^n$$
$$p \mapsto \left(x^1(p), \dots, x^n(p)\right)$$

و هو تقابل مستمر.

تعريف 2 - 2 – 1: المنطوي التبولوجي:

بفرض M فضاءً تبولوجياً قابلاً للفصل، وI مجموعة منتهيّة أو قابلة للعدّ.

نسمّي الفضاء التبولوجي M منطوياً تبولوجياً ذا n بعد، ونرمز له بالرمز M^n؛ إذا وجدت مجموعة من الخرائط المحليّة :

$$\{(U_\alpha, X_\alpha)\ ; \alpha \in I\}$$

بحيث يتحقق ما يأتي:

- من أجل أي $\alpha \in I$ فإن المجموعة $X_\alpha(U_\alpha)$ هي مجموعة مفتوحة من $\mathbb{R}^n$.
- $M^n = \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha$

تعريف 3 - 2 – 1: أطلس المنطوي التبولوجي M^n:

نرمز له بالرمز $A(M^n)$، وهو مجموعة الخرائط المحليّة على M^n.

تعريف 4 - 2 – 1: التطبيق الأملس:

بفرض أن M^n منطوٍ تبولوجي ذو n بُعد، و$A(M^n)$ أطلس على M^n، ولتكن $(V,Y),(U,X)$ خارطتين من الأطلس A. نسمّي التطبيق:

$$Y \circ X^{-1}: X(U \cap V) \to Y(U \cap V)$$
$$(x^1, \dots, x^n) \mapsto \left(y^1(x^1, \dots, x^n), \dots, y^n(x^1, \dots, x^n)\right)$$

تطبيقاً أملساً إذا كانت دوال الانتقال من الاحداثيات $(x^1, \dots, x^n)$ إلى $(y^1, \dots, y^n)$

$$y^1 = y^1(x^1, \dots, x^n)$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$y^n = y^n(x^1, \dots, x^n)$$

تملك في النطاق $X(U \cap V)$ مشتقاتٍ جزئيّة مستمرة من جميع المراتب، ومحدد المصفوفة اليعقوبيّة يحقق:

$$det\left(\frac{\partial y^i}{\partial x^k}\right) \neq 0$$

تعريف 5 - 2 – 1: الأطلس الأعظمي:

بفرض $A = \{(U_\alpha, X_\alpha)\}$ أطلس على المنطوي التبولوجيّ M^n، نقول عن الأطلس A إنّه أعظميّ على M^n إذا كانت أيّةُ خارطةً (W,Z) منسجمةً مع الأطلس A بالضرورة يجب أن تنتمي إليه، حيث تكون الخارطة (W,Z) منسجمةً مع الأطلس A، إذا كان من أجل أي خارطةٍ (U,X) من A بحيث $(U \cap W) \neq \phi$ فإنّ التطبيق:

$$Z \circ X^{-1}: X(U \cap W) \to Z(U \cap W)$$

يكون أملساً.

تعريف 7 2 – 1:- المنطوي التبولوجي ذو البنية الملساء:

نقول عن المنطوي التبولوجي M^n إنّه ذو بنيةٍ ملساء إذا وُجد أطلس A على M^n، يحقق الآتي:

- من أجل أي خارطتين $(X_\alpha, U_\alpha), (X_\beta, U_\beta)$ من A بحيث $U_\alpha \cap U_\beta \neq \phi$ فإنّ التطبيق $X_\beta \circ X_\alpha^{-1}$ تطبيق أملس.

الأطلس A أعظمي على M^n.

ملاحظة 1 – 2 – 1:

إن الشرط الأول كافٍ للتأكد من أن M^n ذو بنية ملساء، وذلك لأن أي أطلس على M^n يمكن إتمامه بصورة وحيدة إلى أطلس أعظمي.

تعريف 8 - 2 – 1: المنطوي التفاضلي:

نقول عن المنطوي التبولوجي M^n إنه منطوي تفاضلي ذو n بعد، إذا كان ذا بنية ملساء.

3 – 1 زمر لي:

تعريف 1 - 3 – 1: زمرة لي(Lie Group):[3]

زمرة لي عبارة عن منطوٍ أملس G مزوّد بالتطبيقَين الأملسَين الآتيَن:

$$G \ni x \mapsto x^{-1} \in G$$

و
$$G \times G \ni (x, y) \mapsto xy \in G$$

ويحقق لأجل كل $x, y, z \in G$ الخواص الآتية:

أ- $x(yz) = (xy)z$

ب- $ex = xe = x$

ج- $xx^{-1} = x^{-1}x = e$

ملاحظة 1 - 3 – 1:

إن زمرة لي هي زمرة تبولوجية.

تعريف 2 - 3 – 1: مركز الزمرة:

لتكن G زمرة، و$a \in G$، عندئذٍ نعرف مركز الزمرة G ورمزه $Z(G)$ بالشكل:

$$Z(G) = \{a: a \in G; xa = ax, \forall x \in G\}$$

تعريف 3 – 1 3-: الزمر عديمة القوى: [3]

نقول عن الزمرة G إنّها عديمة القوى، إذا وجدت متتالية منتهية من الزمر الجزئية في G:

$$\{e\} = E = G_n \subset G_{n-1} \subset \cdots \subset G_2 \subset G_1 \subset G_0 = G$$

تحقق الشروط الآتية:

أ- لأجل كل $0 \leq i \leq n$ فإنّ الزمر G_i ناظميّة في G.

ب- $G_{i-1}/G_i \subseteq Z\left(G/G_i\right)$ حيث $1 \leq i \leq n$.

حيث تُعرّف الزمرة الجزئيّة الناظميّة بالشكل:

لتكن G زمرة، وH زمرة جزئيّة من G. عندئذٍ نقول عن الزمرة الجزئيّة H إنّها ناظميّة في G، إذا تحقق الشرط الآتي:

$$aH = Ha\,; \forall a \in G$$

حيث $Ha = \{ha\,; h \in H\}$ و $aH = \{ah\,; h \in H\}$

تعريف 4- 3 – 1: التشاكل الزمري:[2]

لتكن الزمرتان $(G, \circ_G)$, $(H, \circ_H)$. ندعو التطبيق $\varphi: G \to H$ بأنه تشاكل زمري إذا حقق لأجل كل $x, y \in G$ الخاصة:

$$\varphi(x \circ_G y) = \varphi(x) \circ_H \varphi(y)$$

تعريف 5-3-1: $(\textbf{Automorphism})$:[7]

ليكن V فضاءً متجهيّاً، ولتكن المجموعة:

$$G = \left\{f: V \to V; \text{ خطي وقابل للعكس } f\right\} = Aut(V)$$

وليكن $\circ$ تركيباً داليّاً، عندئذٍ فإنّ الثنائية $(G, \circ)$ تُشكّل زمرة، يُرمز لها بالرمز $GL(V)$.

وعندما V هو $\mathbb{R}^n$ فإنّ مجموعة المؤثرات الخطيّة القابلة للقلب على $\mathbb{R}^n$ هي مجموعة المصفوفات القابلة للقلب ورمزها $GL_n(\mathbb{R})$، ونرمز أيضاً لمجموعة المصفوفات $n \times n$ القابلة للقلب فوق حقل $\mathbb{K}$ بالرمز $GL_n(\mathbb{K})$، ومن ثمّ فإنّ $GL_n(\mathbb{R})$ حالة خاصّة من $GL_n(\mathbb{K})$ (الزمرة الخطيّة العامّة).

تعريف 6-3-1: التمثيل الزمري:[2]

لتكن $(G, \circ_G)$ زمرة ما، وليكن V فضاءً متجهياً، عندئذٍ فإن التمثيل الزمري هو تشاكل φ من G إلى $GL(V)$، أي أنه يُعرّف بالشكل:

لأجل $g_1, g_2 \in G$ نعرّف التمثيل $\varphi: G \to GL(V)$

$$\varphi(g_1 \circ_G g_2) = \varphi(g_1) \circ \varphi(g_2)$$

تعريف 7-3-1: زمرة لي المصفوفية$(\textbf{Matrix Lie Group})$:[2]

ندعو الزمرة الجزئية $H \subseteq GL_n(\mathbb{K})$ بأنها زمرة لي مصفوفية، إذا حققت أنه إن تقاربت متتالية من المصفوفات $\{A_n\}$ في H إلى A، عندئذٍ فإنه إما $A \in H$ أو A ليس لها معكوس. أي بكلامٍ مكافئ يتحقق ذلك إذا كانت H زمرة جزئية مغلقة في $GL_n(\mathbb{K})$.

ملاحظة 2-3-1:[6]

أفضل الأمثلة عن زمر لي المصفوفية هي الزمر التقليدية المعروفة التي سنذكرها بالجدول الآتي:

اسم الزمرة	تعريفها
الزمرة العموديّة Orthogonal Group	$O(n) = \{A \in GL_n(\mathbb{R}): AA^T = I\}$
الزمرة العموديّة الخاصّة Special Orthogonal Group	$SO(n) = \{A \in GL_n(\mathbb{R}): AA^T = I, det(A) = 1\}$
الزمرة الواحديّة Unitary Group	$U(n) = \{A \in GL_n(\mathbb{C}): AA^* = I\}$
الزمرة الواحديّة الخاصّة Special Unitary Group	$SU(n) = \{A \in GL_n(\mathbb{C}): AA^* = I, det(A) = 1\}$

حيث: $A^* = (\bar{A})^T$.

5 – 1 مفاهيم مرتبطة بجبر لي:

تعريف 1 – 5 - 1: جبر لي الجزئي: [6]

ليكن $\mathfrak{g}$ جبر لي، ندعو الفضاء الجزئي $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ بأنه جبر لي جزئي إذا تحققت لأجل أي $x, y \in \mathfrak{h}$ العلاقة: $[x, y] \in \mathfrak{h}$.

تعريف– 5 - 1 2: المثالي في جبر لي: [6]

يُدعى الفضاء الجزئي $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ بأنه مثالية (ideal)، إذا تحقق أنه لأجل $y \in \mathfrak{h}$و $x \in \mathfrak{g}$ يكون $[x, y] \in \mathfrak{h}$.

ملاحظة 1 – 5 - 1: [3]

سنقوم الآن بتعريف الفضاء المماسي لزمرة لي G (في كل نقطة) مع بنية جبر لي.

لنوّضح أولاً المفاهيم الآتية: [2]

لتكن
$$f: \Omega \to \mathbb{E}$$
$$x \mapsto f(x)$$

دالّة من المجموعة الجزئية المفتوحة Ω من $\mathbb{R}^n$ إلى فضاء باناخ $\mathbb{E}$ المزوّد بالنظيم $\|.\|_{\mathbb{E}}$، نقول عن الدالّة f إنّها قابلة للاشتقاق في النقطة $x_0 \in \Omega$ إذا وجد تطبيق خطي $\acute{f}(x_0): \mathbb{R}^n \to \mathbb{E}$ بحيث تتحقق العلاقة:

$$\frac{1}{|x - x_0|_{\mathbb{R}^n}} \left\| f(x) - f(x_0) - \acute{f}(x_0)(x - x_0) \right\|_{\mathbb{E}} \xrightarrow[x \to x_0]{} 0$$

ندعو $\acute{f}(x_0)$ مشتقة f في x_0.

نقول إنّ f من الصف C^1 إذا كان التطبيق $x \mapsto \acute{f}(x)$ مستمراً، ونقول إنّ f من الصف C^2 إذا كان التطبيق $x \mapsto \acute{f}(x)$ من الصف C^1، وهكذا...

وتكون الدالّة f من الصف C^k إذا وفقط إذا كانت جميع المشتقات الجزئية من المراتب $1,2, \dots, k$ موجودة ومستمرة.

ونقول إنّ f من الصف C^∞ إذا كان f من الصف C^k لأجل كل $k \in \mathbb{N}$. في هذه الحالة يكون $C^\infty = \bigcap_{k=1}^{\infty} C^k$.

تعريف– 5 - 1 3: [3]

ندعو التطبيق $X_{(x)}: C^\infty(G) \to \mathbb{R}$ بأنّه متجه مماسي لـ G في $x \in G$، إذا تحققت الشروط:

أ- $X_{(x)}(f + g) = X_{(x)}f + X_{(x)}g$

ب- $X_{(x)}(fg) = X_{(x)}(f)\, g(x) + f(x)\, X_{(x)}(g)$

الفضاء المماسي للزمرة G في $x \in G$، هو فضاء جميع المتجهات المماسيّة في x، وهو فضاء منتهي البعد حيث إنّ بعده مساوٍ لبعد الزمرة G على اعتبارها منطوٍ، ونرمز لهذا الفضاء بالرمز $T_x G$.

تعريف– 5 - 1 4: أس مصفوفة (Matrix Exponential): [2, 6]

لتكن A مصفوفة من الشكل $n \times n$، عندئذٍ فإن أس المصفوفة A يُعرّف بالشكل:

$$e^{A} = \sum \frac{A^{n}}{n!} = I + A + \frac{1}{2}A^{2} + \frac{1}{6}A^{3} \dots$$

تبدو هذه الصيغة مألوفة، فهي مطابقة تماماً لنشر تايلور للدوال الأسية، باستثناء أنه بدلاً من العدد أو المتغير في النشر فإنه لدينا هنا مصفوفة (ممكن أخذ الرمز $exp(A)$ بدلاً من e^{A}).

6 – 1 مفاهيم مرتبطة بالمنطويات:[4]

تعريف– 6 - 1 1: الدالة الملساء في المنطويات:

نقول عن الدالة الحقيقية $f: M^{n} \to \mathbb{R}$ إنها دالة ملساء في النقطة $p \in M^{n}$، ونرمز لذلك اختصاراً $f \in C^{\infty}(p)$ إذا أمكن إيجاد خارطة محليّة $p \in U$و (U, X) بحيث يكون للدالة $\varphi = f \circ X^{-1}$ في الجوار $X(U) \subset \mathbb{R}^{n}$مشتقات جزئية مستمرة من جميع المراتب.

و نقول عن الدالة f إنها دالة ملساء على M^{n} إذا كانت ملساء في كل نقطة من نقاطه.

و نقصد بالرمز $C^{\infty}(p)$ صف الدوال الملساء في جوار U للنقطة $p \in M^{n}$. ونرمز لصف الدوال الملساء على المنطوي الأملس M^{n} بـ $C^{\infty}(M^{n})$.

تعريف– 6 - 1 2: الفضاء المماسي:

المتجه المماسي: لتوضيح مفهوم متجه المماس لمنطوٍ أملس بنقطة ما فيه لا بدَ من توضيح العلاقة المهمَة بين متجه في نقطة من الفضاء $\mathbb{R}^{n}$ وعملية المشتق باتجاه هذا المتجه لدالة في هذا الفضاء.

ليكن ξ_{p} متجهاً من الفضاء $\mathbb{R}^{n}$ مُعطى في النقطة $p \in \mathbb{R}^{n}$. و f دالة حقيقية ملساء مُعرَفة في جوار U للنقطة p.

إنَ المشتق للدالة f باتجاه المتجه ξ_{p} يُعطى بالعلاقة:

$$\left.\frac{\partial f}{\partial \xi}\right|_{p} = \sum_{i=1}^{n} \xi^{i} \frac{\partial}{\partial x^{i}} f(p)$$

و نرمزله بـ $\xi_{p} f$.

و بذلك يمكننا أن نُعرَف دالة ξ_{p} من المجموعة $C^{\infty}(p)$ إلى مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$:

$$\xi_{p} : C^{\infty}(p) \to \mathbb{R}$$

بالشكل: $\xi_{p}\big(f(p)\big) = \xi_{p} f$، وتحقق الخواص الآتية:

- $\xi_{p}(f + g) = \xi_{p} f + \xi_{p} g$
- $\xi_{p}\big(\alpha f\big) = \alpha \xi_{p} f$
- $\xi_{p}(f.g) = \xi_{p} f.g(p) + f(p).\xi_{p} g$

و ذلك من أجل أي دالتين: $f, g \in C^{\infty}(p)\ , \alpha \in \mathbb{R}$.

ملاحظة – 6 - 11:

من المفيد هنا التأكيد على الحقيقة الآتية:

بفرض أنّ $\mu: C^\infty(p) \to \mathbb{R}$ دالة ما تحقق ما يلي:

- $\mu(f+g) = \mu f + \mu g$
- $\mu(\alpha f) = \alpha \mu(f)$
- $\mu(f.g) = \mu(f).g(p) + f(p).\mu(g)$

عندئذٍ يوجد متجه وحيد ξ_p بحيث إنَ: $\xi_p f = \mu(f)$، وذلك لأجل أي دالة $f \in C^\infty(p)$.

بهذا الشكل يمكننا أن نطابق ما بين المتجهات من $\mathbb{R}^n$، والتطبيقات التي تحقق العلاقات السابقة، وتسمح لنا بذلك أن نقابل كل متجه بتفاضل دالة ملساء باتجاه هذا المتجه.

تعريف– 6 - 13: متجه المماس لمنطوٍ أملس في نقطة ما منه:

متجه المماس لمنطوٍ لأملس M^n في النقطة p منه هو دالة حقيقية X_p:

$$X_p: C^\infty(p) \to \mathbb{R}$$

بحيث تُقابَل كل دالة ملساء $f \in C^\infty(p)$ بالعدد $X_p f$ وتحقق الخواص الآتية:

- $X_p(f+g) = X_p f + X_p g$
- $X_p(\alpha f) = \alpha X_p f$
- $X_p(f.g) = X_p f.g(p) + f(p).X_p g$

و ذلك من أجل أي دالتين: $f, g \in C^\infty(p)\ , \alpha \in \mathbb{R}$.

تعريف– 6 - 14: الفضاء المتجهي المماسي:

بفرض أنّ $T_p(M^n)$ هي مجموعة جميع المتجهات المماسة لـ M^n في p. حيث إنّه من الواضح أنّ $T_p(M^n)$ ليست مجموعة خالية فالمتجه الصفري ينتمي إليها.

لنعرّف على هذه المجموعة عمليتي جمع متجهين مماسيين وضرب متجه مماسي بعدد حقيقي.

بفرض أنّ $f \in C^\infty(p)$ و$X_p, Y_p \in T_p(M^n)$ وحيث $\alpha \in \mathbb{R}$ نفرض:

- $(X_p + Y_p)f = X_p(f) + Y_p(f)$
- $(\alpha X_p)f = \alpha X_p f$

يمكننا التأكد بسهولة من أنّ مجموع متجهين مماسيين وحاصل ضرب متجه مماسي بعدد هو متجه مماسي.

لذلك فإنّ $T_p(M^n)$ بالنسبة للعمليتين المذكورتين تشكل فضاءً متجهاً يسمى الفضاء المتجهي المماسي على M^n في النقطة p منه.

ملاحظة– 6 - 1 2: الانتقال من زمرة لي إلى جبر لي:

إنّ الفضاء المماسي في عنصر الوحدة لزمرة لي $G\ (T_eG)$ يشكل جبر لي يُدعى جبر لي للزمرة G، وذلك لأنّه يمكن تمديد أي متجه مماس في عنصر الوحدة لزمرة لي إلى حقل متجهي لا متغير يسارياً وذلك بانسحاب يساري لمتجه المماس إلى نقاط أخرى من المنطوي.

7 – 1 زمرة هايزنبرغ (Heisenberg group):[2, 8]

سنأخذ الآن أس جبر لي هايزنبرغ $\mathfrak{h}_n$ بمُجمله، ونبيّن أنّ أس هذا الجبر هو في الواقع زمرة لي ندعوها زمرة هايزنبرغ. ثمّ سنعرض بعض التعريفات المرتبطة بهذه الزمرة.

1 - 7 - 1 أس جبر هايزنبرغ (Exponential of Heisenberg Algebra):

يمكننا تمثيل العنصر $(x,y,t) \in \mathfrak{h}_n$ بالمصفوفة $M(x,y,t)$، ونعلم أنّ:

$$M(x,y,t)^2 = M(0,0,xy)$$

ويكون أيضاً:

$$M(x,y,t)^3 = M(x,y,t)^2 . M(x,y,t)$$
$$= M(0,0,xy)\,.\,M(x,y,t) = M(0,0,0)$$

أي إنّها مساوية للمصفوفة الصفريّة، وطبعاً جداء أي مصفوفة بالمصفوفة الصفرية سيعطينا مصفوفة صفرية، وبالتالي نحصل على العلاقة:

$$M(x,y,t)^n = M(0,0,0)\ ; \quad \forall n \geq 3$$

والآن لنبحث عن أس المصفوفة $M(x,y,t)$:

$$exp\big(M(x,y,t)\big) = I + M(x,y,t) + \frac{1}{2}M(x,y,t)^2 + \frac{1}{6}M(x,y,t)^3 + \cdots$$
$$= I + M(x,y,t) + \frac{1}{2}M(0,0,xy)$$
$$= I + M\left(x,y,t+\frac{1}{2}xy\right)$$

ولأجل التوضيح نفرض: $m(x,y,t) = M(x,y,t) + I$

وبسهولة نلاحظ أنّ m هي ببساطة كالمصفوفة M مع قطر مكوّن من الواحدات.

باستخدام هذا التعريف الجديد، وبأخذ العلاقة:

$$exp\big(M(x,y,t)\big) = m\left(x,y,t+\frac{1}{2}xy\right)$$

نكون قد قمنا بأخذ أس عنصر من الجبر $\mathfrak{h}_n$.

إنّ هدفنا هو أخذ الأس للجبر $\mathfrak{h}_n$ كاملاً، وهذا ما نجده من خلال العلاقة الآتية:

$$exp\{M(x,y,t); x,y \in \mathbb{R}^n, t \in \mathbb{R}\} = \left\{m\left(x,y,t+\frac{1}{2}xy\right); x,y \in \mathbb{R}^n, t \in \mathbb{R}\right\}$$
$$= \{m(x,y,t); x,y \in \mathbb{R}^n, t \in \mathbb{R}\}$$

حيث استخدمنا حقيقة أنّ مجموعة العناصر من الشكل $t + \frac{1}{2}xy$ مطابقة لمجموعة العناصر من الشكل t؛ حيث t عدد حقيقي.

أصبح لدينا الآن السلسلة الآتية من التطبيقات:

$$\{(x,y,t)\} \xrightarrow{M} \{M(x,y,t)\} \xrightarrow{exp} \{m(x,y,t)\}$$

ندعو $\{m(x,y,t)\}$ زمرة هايزنبرغ المستقطبة (Polarized Heisenberg group)، ونرمز لها بالرمز $\mathbb{H}_{pol}^{n}$ حيث إنّ عمليّة التشكيل المعرّفة على الزمرة هي جداء المصفوفات بالشكل:

$$m(x,y,t)\,.\,m(u,v,s)=m(x+u,y+v,t+s+uy) \quad (1.1)$$

في الواقع في معظم الأحيان نقوم بإبعاد m، وتعريف الزمرة المستقطبة بالشكل:

$$\mathbb{H}_{pol}^{n}=\{(x,y,t)\in\mathbb{R}^{2n+1}:(x,y,t).(u,v,s)=(x+u,y+v,t+s+uy)\}$$

و إضافةً إلى هذا التعريف يوجد تعريفٌ آخر للزمرة كمجموعة $\{M(x,y,t)\}$.

لنستخدم المجموعة $exp\big(M(x,y,t)\big)$، وبالطبع فإنّ الحالتين متشابهتان مع بعض الاختلاف نوعاً ما. للتحقق من ذلك، لنكتب:

$$exp\big(M(x,y,t)\big).exp\big(M(u,v,s)\big)=m\left(x,y,t+\frac{1}{2}xy\right).m\left(u,v,s+\frac{1}{2}uv\right)$$
$$=m\left(x+u,y+v,t+s+\frac{1}{2}(xy+uv)+uy\right)$$
$$=exp\left(M\left(x+u,y+v,t+s+\frac{1}{2}(uy-vx)\right)\right)$$

إنّ العلاقة الأخيرة تنتج من الحقيقة الآتية:

$$exp\left(M\left(x+u,y+v,t+s+\frac{1}{2}(uy-vx)\right)\right)=$$
$$=m\left(x+u,y+v,t+s+\frac{1}{2}(uy-vx)+\frac{1}{2}(x+u)(y+v)\right)$$
$$=m\left(x+u,y+v,t+s+\frac{1}{2}uy-\frac{1}{2}vx+\frac{1}{2}xy+\frac{1}{2}xv+\frac{1}{2}uy+\frac{1}{2}uv\right)$$
$$=m\left(x+u,y+v,t+s+\frac{1}{2}(xy+uv)+uy\right)$$

لقد حصلنا الآن على عملية تشكيل زمرة هايزنبرغ، وإن أهملنا الأس $expM$ واحتفظنا فقط بـ (x,y,t)، فإنّنا نحصل على تعريف زمرة هايزنبرغ ورمزها $\mathbb{H}^{n}$ بالشكل:

$$\mathbb{H}^{n}=\left\{(x,y,t)\in\mathbb{R}^{2n+1}:(x,y,t).(u,v,s)=\left(x+u,y+v,t+s+\frac{1}{2}(uy-vx)\right)\right\} \quad (1.2)$$

ملاحظة 1-7-1: [8]

لتكن $(\mathbb{H}^{n},\circ)$ زمرة هايزنبرغ، ولتكن $(\mathbb{H}_{pol}^{n},\circ_{p})$ زمرة هايزنبرغ مستقطبة، ولنعرّف التطبيق $\varphi:\mathbb{H}^{n}\to\mathbb{H}_{pol}^{n}$ بالشكل: $\varphi(x,y,t)=\left(x,y,t+\frac{1}{2}xy\right)$، عندئذٍ بسهولة نجد أنّ التطبيق φ هو تماثل بين $\mathbb{H}_{pol}^{n}$ و$\mathbb{H}^{n}$.

ملاحظة 1-7-2: [8]

إنّ التعريفين السابقَين للزمرتين متكافئان نظراً لوجود تماثلٍ بينهما.

ملاحظة 3 - 7 - 1: [8]

لدينا في زمرة هايزنبرغ $(2n+1)$ زمرةٌ جزئيةٌ بوسيطٍ واحدٍ، معطاةً بالشكل:

$$G_j = \{(te_j, 0,0) : t \in \mathbb{R}\}$$

$$G_{n+j} = \{(0, te_j, 0) : t \in \mathbb{R}\}, 1 \le j \le n$$

و $G_{2n+1} = \{(0,0,t) : t \in \mathbb{R}\}$

حيث e_j هي المتجهات الإحداثيّة في $\mathbb{R}^n$.

ومقابل هذه الزمر الجزئيّة ذات الوسيط الواحد لدينا $(2n+1)$ حقلاً متجهاً لا متغيّراً يساريّاً، يعطى بالشكل: [1,5]

$$X_j = \left(\frac{\partial}{\partial x_j} - \frac{1}{2} y_j \frac{\partial}{\partial t}\right), j = 1,2, \dots, n$$

$$Y_j = \left(\frac{\partial}{\partial y_j} + \frac{1}{2} x_j \frac{\partial}{\partial t}\right), j = 1,2, \dots, n$$

و $T = \frac{\partial}{\partial t}$

إنّ هذه الحقول المتجهة التي عددها $(2n+1)$ توّلد جبر لي $\mathfrak{h}_n$ لزمرة هايزنبرغ.

وتكون علاقة التبادل الوحيدة غير التافهة هي:

$$[X_j, Y_j] = T, j = 1,2, \dots, n$$

وكما هو معروف فإنّ جبر لي المعرّف على هذه الحقول المتجهة متماثل مع جبر لي المعرّف على المصفوفات $M(x,y,t)$، وبالتالي $\mathfrak{h}_n$ هو جبر لي عديم القوى، وبالنتيجة فإنّ $\mathbb{H}^n$ هي زمرة لي عديمة القوى.

نتيجة 1 - 7 - 1: [8]

بالمطابقة بين $\mathbb{C}^n$ و $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ نجد أنّه يمكن كتابة الصيغة $(uy - vx)$ بالشكل $Im(z.\overline{w})$،

حيث $w = u + iv$ و $z = x + iy$.

وبذلك نحصل على تعريف زمرة هايزنبرغ $\mathbb{H}^n = \mathbb{C}^n \times \mathbb{R}$ المعروف وفق قانون التشكيل المُعرّف كالآتي:

$$(z,t)(w,s) = \left(z + w, t + s + \frac{1}{2} Im(z.\overline{w})\right) \quad (1.3)$$

الخلاصة: [2, 3, 8]

إذا عرفنا زمرة هايزنبرغ بأنّها مجموعة من المصفوفات المثلثيّة العليا ذات القيم الحقيقية، ومن المرتبة 3×3:

$$\mathbb{H}^n = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & y & t \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \; x, y, t \in \mathbb{R} \right\}$$

فنجد أنّ هذه الزمرة ليست تبديلية.

هذا ويمكن تعريف عناصر زمرة هايزنبرغ على أنّها ثلاثيّات من الشكل (x,y,t) مع قانون التشكيل الآتي:

$$\mathbb{H}^n = \left\{(x, y, t) \in \mathbb{R}^{2n+1}: (x, y, t).(u, v, s) = \left(x + u, y + v, t + s + \frac{1}{2}(uy - vx)\right)\right\}$$

إنّ الحيادي في زمرة هايزنبرغ هو $(0,0,0)$، ونظير العنصر (x, y, t) هو العنصر $.(x, y, t)^{-1} = (-x, -y, -t)$

و يُعرّف مركز الزمرة $\mathbb{H}^n$ بالعلاقة:

$$Z(\mathbb{H}^n) = \{(0,0, t); t \in \mathbb{R}\}$$

وهو متماثل مع $\mathbb{R}$.

التوصيات:

نوصي بعد تقديمنا لهذا البحث بالمتابعة اعتماداً على ما تمّ توضيحه، وتوضيح الأهمية الفيزيائية والهندسية لهذه الزمر في أبحاثٍ مستقبلية. وإنّ زمرة هايزنبرغ تدخل في العديد من المجالات التطبيقيّة بما في ذلك الجوانب المختلفة لميكانيك الكم. هذا وتُعتبر هذه الزمرة الأكثر شهرةً في زمر لي عديمة القوى، وتلعب دوراً هامّاً في العديد من فروع الرياضيات، مثل نظريّة التمثيل، المعادلات التفاضليّة الجزئيّة، ونظريّة الأعداد... إضافةً إلى أنّها تُقدّم توسعاً ملحوظاً في الحصول على نتائجٍ مهمّةٍ في التحليل التوافقي الإقليدي.

قائمة المراجع:

1. Canarecci, G.: “Analysis of the Kohn laplacian on the Heisenberg group and on Cauchy_ Riemann manifolds”. Alma Mater studiorum, university of Bologna, (2013/14).
2. Celebi, R., Hendricks, K. and Jordan, M.: “The Heisenberg group and uncertainty principle in Mathematical physics”. Research program under the supervision of Dr. Hadi Salamasian, university of Ottawa, (2015).
3. Fischer, V. and Ruzhansky, M.: “Quantization on nilpotent Lie groups”. Progress in Mathematics, (2015).
4. 4.Gharibah, T. and Deeban. E and Sheha. M.: “Differential Geometry”. Al Baath University, Syria, 454, (2010).
5. Ghosh, S. and Srivastava, R.K.: “Heisenberg uniqueness pairs for the Fourier transform on the Heisenberg group”. Guwahati, India, (2018).
6. Kirillov, A.: “Introduction To Lie Groups and Lie Algebras”. USA, 136p, 9_36, 67_70, (2002).
7. Kisil, V.: “The Heisenberg group in Mathematics and physics”. University of Leeds, England, Varna, (2016).
8. Thangavelu, S.: “Harmonic analysis on the Heisenberg group”. Progress in Mathematics 159, Birkhäuser, Boston, MA, (1998).
9. Woit, P.: “Quantum theory, groups and representations: An introduction (final draft version)”. Columbia university, (2017).