Journal of Nature, Life and Applied Sciences
Volume (4), Issue (3) : 30 Sep 2020
P: 55 - 67

AJSRP
ISSN: 2522-3356

مجلة العلوم الطبيعية والحياتية والتطبيقية
المجلد (4)، العدد (3) : 30 سبتمبر 2020م
ص: 55 - 67

Paley_ Wiener Theorems for The Fourier Transform depending on the Heisenberg group

Soha Ali Salamah

Faculty of Sciences || Al-Baath University || Syria

Abstract: In this paper, we talk about Heisenberg group, the most known example from the lie groups. After that, we discuss the representation theory of this group, and the relationship between the representation theory of the Heisenberg group and the position and momentum operators that shows how we will make the connection between the Heisenberg group and physics.

we have considered only the Schrödinger picture. That is, all the representations we considered are realized on the Hilbert space $L^2(\mathbb{R}^n)$. we define the group Fourier transform on the Heisenberg group as an operator valued function, and other facts and properties.

In our research we depended on new formulas for some mathematical concepts such as Fourier Transform and Weyl transform .

The main aim of our research is to introduce the Paley_ Wiener theorem for the Fourier transform on the Heisenberg group. We will show that the classical Paley_ Wiener theorem for the Euclidean Fourier transform characterizes compactly supported functions in terms of the behavior of their Fourier transforms. And we are interested in establishing results for the group Fourier transform and the Weyl transform.

Keywords: Heisenberg group, The Schrödinger Representations, The Group of Fourier Transform, Weyl transform, Paley_ Wiener theorems.

مبرهنات بالي _ وينر لتحويل فوريه اعتماداً على زمرة هايزنبرغ

سهى علي سلامة

كلية العلوم || جامعة البعث || سوريا

الملّخص: عرّفنا في بحثنا هذا زمرة هايزنبرغ، وهي الزمرة الأكثر شهرةً من زمر لي. ثمّ ناقشنا نظريّة التمثيل لهذه الزمرة، إضافةً إلى العلاقة بين نظريّة التمثيل لزمرة هايزنبرغ، ومؤثرات كميّة الحركة والموضع. وهذا ما يُبيّن لنا كيفية تحقيق الترابط بين زمرة هايزنبرغ والفيزياء.

وسنأخذ في بحثنا هذا بوجهة نظر شرودنجر Schrödinger، التي تعتبر أنّ جميع التمثيلات التي نفرضها تتحقق على فضاء هيلبرت $L^2(\mathbb{R}^n)$. ثمّ نُعرّف زمرة تحويل فوريه على زمرة هايزنبرغ. إضافةً إلى مفاهيم أخرى ذات أهميّة في الأبحاث المشابهة.

وقد اعتمدنا في بحثنا هذا على صيغ جديدة لبعض المفاهيم الرياضيّة مثل تحويل فوريه وتحويل وايل.

إنَ الهدف الرئيس من بحثنا هذا هو تقديم مبرهنة Paley_ Wiener لأجل تحويل فوريه على زمرة هايزنبرغ. وسوف نُبيّن أنّ مبرهنة Paley_ Wiener التقليديّة لتحويل فوريه التقليدي، تُميّز الدوال ذات الدعامة المتراصّة من خلال سلوك تحويل فوريه لها. وسنهتم بإنشاء النتائج لأجل زمرة تحويل فوريه، وتحويل وايل.

الكلمات المفتاحيّة: زمرة هايزنبرغ، تمثيلات شرودنجر، زمرة تحويل فوريه، تحويل وايل، مبرهنات بالي_ وينر.

المقدّمة:

يرتبط الإطار الرياضي لميكانيكا الكم ارتباطاً وثيقاً بما يصفه علماء الرياضيات بنظريّة تمثيل الزمر. وفي بحثنا هذا سندرس هذه الفكرة ببعض التفصيل، ونعمل من خلال بعض الأنواع من الزمر، وذلك كنتيجةٍ للعلاقة الأساسيّة بين ميكانيكا الكم ونظرية التمثيل، والتي ببساطة تدور حول أنّه عندما يكون لدينا جملة كموميّة فيزيائيّة تؤثر عليها زمرة G، فإنّ فضاء الحالة لهذه الجملة سيكون كما التمثيل الواحدي للزمرة المؤثرة عليها. وهذا يعني أنّ نظرية التمثيل تُقدّم معلوماتٍ مهمّةً حول فضاءات الحالة الميكانيكية الكموميّة عندما تؤثر زمرة ما على هذه الجملة الفيزيائية. [16]، [14]، [4]

وبذلك تصبح الفيزياء بالنسبة لعلماء الرياضيات مصدراً مثمراً للغاية لدراسة التمثيلات الواحدية.

كانت بداية ظهور بنية زمر لي عندما لاحظ عالم الرياضيات Sophus Lie عام 1870 العلاقة الوثيقة بين هذا النوع من الزمر، وحلول بعض المعادلات التفاضليّة. ثمّ تمّت الملاحظة بأنّ الموّلدات لزمر لي المؤثرة على فضاءاتٍ مناسبة، لها الصيغة نفسها التي تتميز بها الدوال الخاصّة.

ومن الأمثلة عن زمر لي عديمة القوى نجد زمرة هايزنبرغ، وإنّ موضوع دراستنا في هذا البحث هو التحليل التوافقي على هذه الزمرة حيث عرّفنا تمثيلاتٍ واحدية على زمرة هايزنبرغ واستخدمنا هذه التمثيلات في حل بعض مسائل التحليل واعتمدنا على ما توصلنا إليه في إثبات مبرهنات بالي_ وينر الشهيرة. [16]، [6]، [4]

مشكلة البحث:

إنّ زمرة هايزنبرغ تدخل في العديد من المجالات التطبيقيّة بما في ذلك الجوانب المختلفة لميكانيكا الكم. وقد سُمّيت هذه الزمرة عند علماء الرياضيات بزمرة هايزنبرغ، في حين أطلق عليها علماء الفيزياء اسم (زمرة وايل) Weyl group. هذا وتُعتبر هذه الزمرة الأكثر شهرةً في زمر لي عديمة القوى، وتلعب دوراً مهمَاً في العديد من فروع الرياضيات، مثل نظريّة التمثيل، المعادلات التفاضليّة الجزئيّة، ونظريّة الأعداد... إضافةً إلى أنّها تُقدّم توسعاً ملحوظاً في الحصول على نتائجٍ مهمّةٍ في التحليل التوافقي الإقليدي. [16]

لنفرض أنّ تحويل فورييه لدالّة f على $\mathbb{R}^n$ ينسحب بمقدار $\zeta \in \mathbb{R}^n$، وذلك بالصيغة:

$$\mathcal{F}f(\xi+\zeta) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix(\xi+\zeta)} f(x)dx$$

إنّ مبرهنة Paley_ Wiener تتحقق عندما تكون f دالّة ذات دعامة متراصّة، هذا ويمكن أن نأخذ ζ بحيث تكون قيمتها عقديّة، وتكون المتراجحة الآتية محققة:

$$\left|\mathcal{F}f(\xi+\zeta)\right| \le Ce^{B|Im(\zeta)|}$$

حيث B وC ثوابت.

لذلك فإنّه للحصول على مبرهنات Paley_ Wiener لأجل زمر هايزنبرغ، يلزمنا مؤثراتٍ محدودة تؤثر في $L^2(\mathbb{R}^n)$، وتنسحب بأعدادٍ عقديةٍ ζ. [16]

مواد البحث وطرائقه:

اعتمدنا في دراستنا هذه على صيغ جديدة لمفهوم تحويل فورييه بالاعتماد على زمرة هايزنبرغ وتمثيلات شرودنجر. ثمَ درسنا مبرهنات بالي_ وينر اعتماداً على زمرة هايزنبرغ باستخدام هذه الصيغ الجديدة وقمنا بإثبات هذه المبرهنات.

تعريف (1): $[1]$، $[5]$، $[10]$ إنّ زمرة هايزنبرغ هي زمرة من الانسحابات للنصف العلوي لفضاء سيجل في الفضاء $\mathbb{C}^{n+1}$(the Siegel upper half space)، ويعرّف عليها قانون التشكيل بالعلاقة:

$$\left(\mathrm{x}، \mathrm{y}، \mathrm{t}\right)\left(u، v، s\right) = \left(x+u، y+v، t+s+\tfrac{1}{2}(u.y-v.x)\right)$$

ويُرمز لهذه الزمرة بالرمز $\mathbb{H}^n$.

كما يتحقق أن $\mathbb{H}^n = \mathbb{C}^n \times \mathbb{R}$ وفق قانون تشكيلٍ مكافئ للقانون السابق يُعطى بالعلاقة:

$$\left(z، t\right)\left(w، s\right) = \left(z+w، t+s+\tfrac{1}{2}Im(z.\overline{w})\right)$$

تعريف (2): التمثيل (Representation): $[9]$، $[6]$، $[3]$

التمثيل π للزمرة G هو تشاكل من الزمرة G إلى الزمرة $GL(V)$ (زمرة المؤثرات الخطيّة القابلة للعكس على V)، حيث V هو فضاء متجهي عقدي غير صفري، نعتبره كفضاء تمثيل لـ π.

تعريف (3): التمثيل الواحدي (Unitary representation): $[17]$، $[3]$

ندعو التمثيل π تمثيلاً واحدياً إذا تحقق أنّه لأجل كل $g \in G$ فإنّ المؤثر $\pi(g)$ واحدي على V، أي إذا تحققت العلاقة:

$$\langle \pi(g)(v)، \pi(g)(w)\rangle = \langle v، w\rangle$$

لأجل كل $g \in G$ و$v، w \in V$.

تعريف (4): $[14]$، $[5]$

يُطلق على الفضاء الجزئي المغلق $W \subset V$ بأنّه فضاء لا متغيّر بالنسبة لـ π إذا تحققت العلاقة:

$$\pi(g)W \subset W$$

لأجل كل $g \in G$.

تعريف (5): التمثيل غير القابل للاختزال: $[3]$

يُطلق على التمثيل π إنّه غير قابل للاختزال إذا لم يتواجد أي فضاء جزئي لا متغيّر بالنسبة لـ π ومغلق تماماً، أي أن يكون الفضاء الجزئي اللا متغير والمغلق الوحيد هو فقط O إضافة إلى الفضاء V نفسه.

تعريف (6): $[16]$، $[3]$ ، $[1]$

لتكن $\mathbb{H}^n = \mathbb{C}^n \times \mathbb{R}$ زمرة هايزنبرغ المزودّة بقانون التشكيل الآتي:

$$\left(z، t\right).\left(w، s\right) = \left(z+w، t+s+\frac{1}{2}Im(z.\overline{w})\right)$$

إن جبر لي الموافق $\mathfrak{h}_n$ يوَّلد بـ $(2n+1)$ حقل متجه معطاة بالشكل:

$$; \ j = 1، 2، \ \dots، n \ X_j = \left(\frac{\partial}{\partial x_j} - \frac{1}{2}y_j\frac{\partial}{\partial t}\right)$$

$$; \ j = 1، 2، \ \dots، n \ Y_j = \left(\frac{\partial}{\partial y_j} + \frac{1}{2} x_j \frac{\partial}{\partial t}\right)$$

$$T = i \ \frac{\partial}{\partial t} \ ; \ i = \sqrt{-1}$$

لذلك يسمّى المؤثر $\mathcal{L}$ المعرّف بالشكل:

$$\mathcal{L} = -\sum_{j=1}^{n} \left(X_j^2 + Y_j^2\right)$$

مؤثر لابلاس الجزئي (أو اللابلاسي الجزئي) أو لابلاسي هايزنبرغ.

لنأخذ التمثيل اللانهائي(the infinite representations) الذي يتم بواسطة الأعداد الحقيقيّة $\lambda \neq 0$ كما يلي:

$$\pi_\lambda \left(z، t\right) \varphi(\xi) = e^{i\lambda t} e^{i\lambda\left(x.\xi + \frac{1}{2} x.y\right)} \varphi(\xi + y)$$

و ذلك من أجل كل $\varphi \in L_2(\mathbb{R}^n)$. وهنا يكون:

$$\pi_\lambda \left(z، t\right) \pi_\lambda \left(w، s\right) = \pi_\lambda \left(\left(z، t\right).\left(w، s\right)\right)$$

كما أن $\pi_\lambda \left(z. \ t\right)$ مؤثر واحدي على $L_2(\mathbb{R}^n)$. وبعبارة أخرى إنّ $\pi_\lambda \left(z. \ t\right)$ هو تمثيل واحدي للزمرة $\mathbb{H}^n$ على $L_2(\mathbb{R}^n)$.

تعريف (7): تحويل فورييه_ ويغنر (Fourier_ Wigner Transform): [16]

بفرض $\psi \in L^2(\mathbb{R}^n)$ ،φ، نعرّف الدالّة:

$$V_\varphi \left(\psi، z\right) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \left(\pi(z)\varphi، \psi\right) \ (1.1)$$

و التي تسمّى تحويل فورييه_ ويغنر لـ φ وψ.

تعريف (8): [12]، [10]، [8]

لنضع: $\pi_\lambda \left(z. \ t\right) = e^{i\lambda t} \pi_\lambda(z)$

حيث: $\pi_\lambda(z) = \pi_\lambda \left(z. \ 0\right)$

و لنُعرّف:

$$f^\lambda(z) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t} f \left(z، t\right) dt \ \ (2.1)$$

بأنّه تحويل فورييه العكسي لـ f بالمتغير t.

و بالتالي تنتج العلاقة:

$$[8] \ \hat{f}(\lambda)\varphi = \int_{\mathbb{C}^n} f^\lambda(z) \pi_\lambda(z) \varphi dz \ (2.2)$$

و بالتالي يمكننا تشكيل مؤثرات بالشكل:

$$\left[7، 12\right] \ W_\lambda(g) = \int_{\mathbb{C}^n} g(z) \pi_\lambda(z) dz \ (2.3)$$

لدوال مُعرّفة على $\mathbb{C}^n$.

و عندما $\lambda = 1$، فإنّنا ندعو هذه المؤثرات تحويل وايل (Weyl transform) ونرمز له بالرمز $W(g)$.

و نكتب أيضاً $\pi(z)$ بدلاً من $\pi_1(z)$.

و بالتالي نحصل على العلاقة:

$$W(g)\varphi(\xi) = \int_{\mathbb{C}^n} g(z)\pi(z)\varphi(\xi)dz \quad (2.4)$$

تعريف (9): دوال هرميت: $\left[13، 16\right]$

لنبدأ بتعريف كثيرات حدود هرميت، لأجل $t \in \mathbb{R}$ و $k = 0، 1، 2، \dots\dots$، نُعرّف كثيرة حدود هرميت $H_k(t)$ بالمعادلة:

$$H_k(t) = (-1)^k e^{t^2} \frac{d^k}{dt^k}\{e^{-t^2}\} \quad (3.1)$$

عندئذٍ فإنّ دوال هرميت المنظمة تُعرّف بالشكل:

$$h_k(t) = \left(2^k\sqrt{\pi}k!\right)^{-\frac{1}{2}} H_k(t)e^{-\frac{1}{2}t^2} \quad (3.2)$$

إنّ هذه الدوال تُشكّل قاعدة متعامدة منظمة في الفضاء $L^2(\mathbb{R})$.

يُرمز لدوال هرميت ذات الأبعاد العليا بالرمز Φ_α، ويتم الحصول عليها بأخذ جداءات تنسوريّة. وبالتالي لأجل أي دليل متعدّد $\alpha = \left(\alpha_1، \alpha_2، \dots، \alpha_n\right)$ ولأجل $x \in \mathbb{R}^n$، فإنّنا نُعرّف:

$$\Phi_\alpha(x) = \prod_{j=1}^{n} h_{\alpha_j}(x_j)\,; x = \left(x_1، x_2، \dots، x_n\right) \in \mathbb{R}^n \quad (3.3)$$

و عندئذٍ تكون $\{\Phi_\alpha\}$ قاعدة متعامدة للفضاء $L^2(\mathbb{R}^n)$.

تعريف (10): دوال هرميت الخاصّة:

لأجل كل $\alpha، \beta \in \mathbb{N}^n$، و $z \in \mathbb{C}^n$ نُعرّف دوال هرميت الخاصّة بالشكل:

$$\Phi_{\alpha، \beta}(z) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix.\xi}\Phi_\alpha\left(\xi + \frac{y}{2}\right)\Phi_\beta\left(\xi - \frac{y}{2}\right)d\xi \quad (3.4)$$

و بالتالي نجد أنّ $\Phi_{\alpha، \beta}(z)$ هي تحويلات فورييه_ ويغنر لدوال هرميت Φ_β و Φ_α، أي إنّ:

$$\Phi_{\alpha، \beta}(z) = V\left(\Phi_\alpha، \Phi_\beta\right)(z)$$

ملاحظة (1): يمكننا التعبير عن دوال هرميت الخاصّة بالاعتماد على مفهوم دوال لاجير.

لدينا الصيغة: $\left[13، 16\right]$

$$\Phi_{\alpha، \alpha}(z) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \prod_{j=1}^{n} L_{\alpha_j}\left(\frac{1}{2}\left|z_j\right|^2\right)e^{-\frac{1}{4}\left|z_j\right|^2} \quad (3.5)$$

حيث $L_k(t)$ هي كثيرة حدود لاجير من المرتبة 0.

تجدر الإشارة إلى أنّ كثيرة حدود لاجير من المرتبة $\alpha > -1$ والدرجة k، تُعرّف بالعلاقة:

$$L_k^{\alpha}(t)e^{-t}t^{\alpha} = \frac{1}{k!}\left(\frac{d}{dt}\right)^k (e^{-t}t^{k+\alpha}) \quad (3.6)$$

حيث إنّ:

$$L_{\mu}^{m}(z) = \prod_{j=1}^{n} L_{\mu_j}^{m_j}\left(\frac{1}{2}|z_j|^2\right) \quad (3.7)$$

مبرهنة (1): $[16]$

إنّ العلاقتين الآتيتَّين محققتين:

$$\Phi_{\mu+m، \mu} = (2\pi)^{-\frac{n}{2}}\left(\frac{\mu!}{(\mu+m)!}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{i}{\sqrt{2}}\right)^{|m|} \bar{z}^m L_{\mu}^{m}(z)e^{-\frac{1}{4}|z|^2}$$

$$\Phi_{\mu، \mu+m} = (2\pi)^{-\frac{n}{2}}\left(\frac{\mu!}{(\mu+m)!}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{-i}{\sqrt{2}}\right)^{|m|} z^m L_{\mu}^{m}(z)e^{-\frac{1}{4}|z|^2}$$

النتائج:

إنّ وصولنا للصيغ الجديدة لبعض المفاهيم الأساسية في التحليل الرياضي اعتماداً على زمرة هايزنبرغ ساهم بشكلٍ كبير في إثبات العديد من المرهنات الشهيرة المرتبطة بهذه المفاهيم.

المناقشة:

أولاً لنفرض تحويل وايل، إذا كانت $f \in L^2(\mathbb{C}^n)$، عندئذً فإنّنا نعلم أنّ $W(f)$ هو مؤثر هيلبرت_ شميث.

لأجل $\xi = \left(\xi'، \xi''\right) \in \mathbb{R}^{2n}$، لنضع:

$$\mathrm{U}(\xi) = \pi(\xi' + i\xi'')$$

والآن لأجل كل $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$، لنُعرّف تحويل فورييه_ وايل بالشكل:

$$\tilde{f}(\xi) = \mathrm{U}(\xi)\, W(f)\, \mathrm{U}(-\xi) \quad (4.1)$$

حيث $\mathrm{U}(\xi)$ هي مؤثرات واحدية.

نلاحظ أنّ $\tilde{f}(\xi) \in S_2$ لأجل كلّ $\xi \in \mathbb{R}^{2n}$.

عندئذٍ فإنّ صورة $L^2(\mathbb{C}^n)$ تحت تحويل فورييه_ وايل، تتكوّن من الدوال $F(\xi)$ التي تأخذ قيمها في S_2، وتحقق العلاقة:

$$F(0) = \mathrm{U}(-\xi)\, F(\xi)\, \mathrm{U}(\xi)$$

والآن لنرمز بالرمز E_0 للفضاء الجزئي لهذه الصورة، والذي عناصره هي مقصورات لـ $\mathbb{R}^{2n}$ من الدوال الصحيحة من النوع الأسي التي تأخذ قيمها في S_2.

وهذا يعني أنّ $F \in E_0$ إذا وفقط إذا تحققت الشروط الآتية:

- $F(\zeta)$ هي دالّة صحيحة بـ ζ، وتأخذ قيمها في S_2، وتحقق التقدير:

$$\|F(\zeta)\|_{HS} \leq ce^{B|Im(\zeta)|}$$

لأجل بعض الثوابت $B > 0$.

- تتحقق العلاقة: $F(0) = \mathrm{U}(-\xi)\, F(\xi)\, \mathrm{U}(\xi)$

لأجل كل $\xi \in \mathbb{R}^{2n}$.

يمكن تزويد الفضاء E_0 بتبولوجيا على النحو الآتي.

ليكن $\acute{E}\left(\mathbb{R}^{2n}، S_2\right)$ فضاء من التوزيعات ذات الدعامة المتراصّة على $\mathbb{R}^{2n}$، والتي تأخذ قيمها في فضاء هيلبرت S_2، أي إنّ $T \in \acute{E}\left(\mathbb{R}^{2n}، S_2\right)$، هو مؤثر خطيٍّ مستمر من $C^{\infty}(\mathbb{R}^{2n})$ في S_2، حيث $C^{\infty}(\mathbb{R}^{2n})$ مزوّد بتبولوجيا من التقاربات المنتظمة لجميع المشتقات على مجموعات متراصّة.

ولأجل كل $T \in \acute{E}\left(\mathbb{R}^{2n}، S_2\right)$، لنعرّف تحويل فوريه الموافق لها بالشكل:

$$\hat{T}(\xi) = \left(T، e_{\xi}\right)$$

حيث $e_{\xi}(x) = e^{ix\xi}$.

- إنّ مبرهنة Paley_ Wiener للتوزيعات ذات الدعامات المتراصّة، والتي تأخذ قيمها في فضاء هيلبرت، تنصّ على الآتي: [15]

يكون $T \in \acute{E}\left(\mathbb{R}^{2n}، S_2\right)$، إذا وفقط إذا كان $\hat{T}(\xi)$ تمديداً لدالّة صحيحة من النوع الأسي، وكانت العلاقة الآتية محققة:

$$\left\|\hat{T}(\zeta)\right\|_{HS} \leq C(1+|\zeta|)^N e^{B|Im(\zeta)|}$$

وذلك لأجل بعض الثوابت Cو B.

لنرمز بالرمز E لصورة $\acute{E}\left(\mathbb{R}^{2n}، S_2\right)$ تحت تحويل فوريه.

إنّ الفضاء E مُزوّد بتبولوجيا قويّة، تجعل تحويل فوريه عبارة عن تشاكل تبولوجي بين Eو $\acute{E}\left(\mathbb{R}^{2n}، S_2\right)$.

في هذه التبولوجيا تتقارب المتتالية $\{F_j\}$ إلى F، إذا تحقق الشرطان:

- $F_j(\zeta) \to F(\zeta)$ بشكلٍ منتظمٍ على مجموعاتٍ متراصّة.
- $F(\zeta)$و $F_j(\zeta)$ تحقق التقديرات مع Bو N بشكلٍ منفصلٍ عن j.

هذا وإنّ الحصول على تبولوجيا للفضاء E_0 يتمّ من خلال التبولوجيا في الفضاء E.

مبرهنة (2) : [15]

إنّ الفضاء E_0 هو فضاء جزئي مغلق من الفضاء E.

الإثبات:

لنفرض $F_j(\zeta) \in E_0$، و$F_j(\zeta) \to F(\zeta)$ في E.

من التعريف واضح أنّ: $F_j(0) \to F(0)$ في S_2، وبالتالي فإنّه تتحقق العلاقة:

$F(0) = W(f)$ لأجل بعض $f \in L^2(\mathbb{C}^n)$.

ونحتاج أن نُبيّن صحّة العلاقة:

$$W(f) = \mathrm{U}(-\xi)\, F(\xi)\, \mathrm{U}(\xi)$$

لأجل كل $\xi \in \mathbb{R}^{2n}$.

لنُظهر ذلك بدءاً بملاحظة العلاقة الآتية:

$$\mathrm{U}(-\xi)\, F_j(\xi)\, \mathrm{U}(\xi) - F(0) = \mathrm{U}(-\xi)\, \Big(F_j(\xi) - \mathrm{U}(\xi)F(0)\mathrm{U}(-\xi)\Big)\, \mathrm{U}(\xi)$$

وهذا يعني:

$$F_j(\xi) - \mathrm{U}(\xi)\, F(0)\, \mathrm{U}(-\xi) = \mathrm{U}(\xi)\, \Big(F_j(0) - F(0)\Big)\, \mathrm{U}(-\xi)$$

وبالتالي فإنّ $F_j(\xi) - \mathrm{U}(\xi)F(0)\mathrm{U}(-\xi)$ تتقارب إلى 0 في S_2.

ولكنّنا بعد ذلك نحصل على العلاقة الآتية:

$$F_j(\xi) = \mathrm{U}(\xi)\, F(0)\, \mathrm{U}(-\xi)$$

والتي تُثبت المطلوب.

- سنذكر الآن مبرهنة Paley_ Wiener لتحويل وايل.

ليكن $\acute{E}(\mathbb{C}^n)$ هو فضاء التوزيعات ذات الدعامة المتراصّة على $\mathbb{C}^n$، ولتكن:

$$L_0^2(\mathbb{C}^n) = L^2 \cap \acute{E}(\mathbb{C}^n)$$

هي مجموعة جميع الدوال $f \in L^2(\mathbb{C}^n)$ ذات الدعامة المتراصّة.

مبرهنة(3):

إنّ تحويل فوريه_ وايل يُمثل تشاكلاً بين E_0 و $L_0^2(\mathbb{C}^n)$، أي إنّ $f \in L_0^2(\mathbb{C}^n)$ إذا وفقط إذا كان تحويل فوريه_ وايل لها يحقق العلاقة: $\tilde{f} \in E_0$.

الإثبات:

بسهولة تتضح العلاقة:

$$\mathrm{U}(\xi)\, \pi(z)\, \mathrm{U}(-\xi) = e^{i(x\xi'' - y\xi')}\pi(z)$$

وبالتالي:

$$\tilde{f}(\xi) = \int_{\mathbb{C}^n} e^{i(x\xi'' - y\xi')} f(z)\pi(z)dz$$

والآن إذا كانت f لها دعامة في $|z| \le B$، عندئذٍ فإنّه يمكن تمديد $\tilde{f}(\xi)$ إلى دالّة صحيحة $\tilde{f}(\zeta)$ بـ $\zeta \in \mathbb{C}^{2n}$، وبحسب مبرهنة بلانشريل لتحويل وايل، يكون لدينا أيضاً التقدير:

$$\left\|\tilde{f}(\zeta)\right\|_{HS} \le Ce^{B|Im(\zeta)|}$$

وهذا ما يُثبت لنا الاتجاه المباشر للمبرهنة.

الآن لإثبات العكس، نواصل العمل على النحو الآتي:

ليكن $F(\zeta) \in E_0$، ولتكن $f \in L^2(\mathbb{C}^n)$ بحيث $F(0) = W(f)$. نحتاج أن نبيّن أنّ f ذات دعامة متراصّة.

لنفرض لأجل $\xi' \in \mathbb{R}^n$، الدالّة:

$$\tilde{f}_1(\xi') = F\left(\xi' ، 0\right) = \pi(\xi')\, W(f)\, \pi(-\xi')$$

عندئذٍ بالحساب نحصل على العلاقة:

$$\tilde{f}_1(\xi') = \int_{\mathbb{C}^n} e^{-iy.\xi'} f(z)\pi(z)dz$$

لدينا $F(\zeta)$ يحقق:

$$\|F(\zeta)\|_{HS} \leq Ce^{B|Im(\zeta)|}$$

لتكن $\varphi\ \psi \in L^2(\mathbb{R}^n)$، ولنفرض الدالّة:

$$\left(\tilde{f}_1(\xi')\varphi،\psi\right) = \int_{\mathbb{C}^n} e^{-iy.\xi'} f(z)\ \left(\pi(z)\varphi،\psi\right) dz$$

وهي دالّة صحيحة من النوع الأسّي.

إذا وضعنا:

$$g(y) = \int_{\mathbb{C}^n} f(z)\left(\pi(z)\varphi،\psi\right) dz$$

عندئذٍ $\left(\tilde{f}_1(\xi')\varphi،\psi\right)$ هو تحويل فورييه لـ g.

وبالتالي اعتماداً على مبرهنة Paley_ Wiener التقليدية، نجد أنّ g لها دعامة في $|y| \leq B$.

ومن هذا نريد أن نخلص إلى أنّ f نفسها تنعدم لأجل $|y| \geq B$.

لإثبات هذا نأخذ: [2]

$$\psi = \Phi_m \text{ و } \varphi = \Phi_0$$

حيث m هي دليل متعدّد.

عندئذٍ اعتماداً على المبرهنة (1) نعلم أنّ: [2]

$$\left(\pi(z)\varphi،\psi\right) = C_m z^m e^{-\frac{1}{4}|z|^2}$$

حيث C_m ثابت.

لذلك فإنّه عندما $|y| \geq B$، يكون لدينا العلاقة الآتية:

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(z)(x+iy)^m e^{-\frac{1}{4}|z|^2} dx = 0$$

وهذا صحيح لأجل جميع قيم m.

نلاحظ أنّ $f(x+iy)$ معامدة لكل دوال هرميت، وبالتالي يكون $f(x+iy) = 0$ وذلك لأجل كل x، وحيث $|y| \geq B$.

بالمثل بأخذ $F\left(0، \xi''\right)$، يمكن أن نُبيّن أنّ $f(x+iy)$ لها دعامة في $|x| \leq B$.

وهذا ما يُكمل إثبات المبرهنة.

يمكننا أن نصيغ مبرهنة مشابهة لأجل زمرة تحويل فورييه، بحيث تُميّز هذه المبرهنة الدوال ذات الدعامة المتراصّة بالمتغير z.

حيث إنّنا نهتم بمبرهنة Paley_ Wiener التي تأخذ بعين الاعتبار جميع المتغيرات، ولن ندخل في صياغة هذه النتيجة، وبدلاً من ذلك سوف نعيد صياغة المبرهنة المذكورة أعلاه بشكلٍ مختلفٍ بعض الشيء، وهذا ما يُعطينا مؤشراً لما سيلزم في حالة زمرة تحويل فورييه.

بالعودة إلى تحويل فورييه على $\mathbb{R}^n$، وبأخذ المشتقات لـ $\hat{f}$ نحصل على العلاقة:

$$\partial_\xi^\alpha \hat{f}(\xi) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\xi} (-ix)^\alpha f(x) dx \quad (4.2)$$

و ذلك لأجل أي دليلٍ متعدّدٍ α.

إذا كانت f دالّة ذات دعامة متراصّة في $|x| \leq B$، عندئذٍ واضح أنّ:

$$\left|\partial_\xi^\alpha \hat{f}(\xi)\right| \leq C\, B^{|\alpha|}$$

و ذلك لأجل كل α.

والعكس صحيح أيضاً.

إذا كانت التقديرات المذكورة سابقاً صحيحة، عندئذٍ فإنّ الدالّة:

$$F(\zeta) = \sum_\alpha \frac{\partial_\xi^\alpha \hat{f}(0)}{\alpha!} \zeta^\alpha$$

تُعرّف دالّةً صحيحةً، ويكون:

$$F(\xi + i\eta) = \sum_\alpha \frac{\partial_\xi^\alpha \hat{f}(\xi)}{\alpha!} (i\eta)^\alpha$$

وكذلك يتحقق التقدير:

$$|F(\zeta)| \leq C\, e^{B|Im(\zeta)|}$$

وبالتالي حسب مبرهنة Paley_ Wiener لتحويل فورييه، ستكون f دالّة لها دعامة في $|x| \leq B$.

و إنّنا نبحث عن نتيجةٍ مُشابهةٍ في حالة تحويل وايل.

بفرض مؤثرات الجداء M_j ، $\bar{M}_j$ حيث $j = 1، 2، \ldots، n$، والمُعرّفة بالشكل:

$$M_j f(z) = Z_j f(z)$$

$$\bar{M}_j f(z) = \bar{Z}_j f(z) \quad (4.3)$$

إنّنا نقوم بحساب تحويل وايل لـ $\bar{M}_j f$ و $M_j f$ من خلال $W(f)$.

لتكن المؤثرات:

$$A_j = \frac{\partial}{\partial \xi_j} + \xi_j$$

$$A_j^* = -\frac{\partial}{\partial \xi_j} + \xi_j \quad (4.4)$$

والتي هي المؤثرات العادمة (annihilation operators)، والمؤثرات المولّدة (creation operators) في ميكانيك الكم.

لأجل مؤثرٍ محدودٍ T على $L^2(\mathbb{R}^n)$ لنعرّف المشتقات (المعادلات):

$$\delta_j T = \left[A_j، T\right] = A_j T - T A_j$$

$$\bar{\delta}_j T = -\left[A_j^*، T\right] = T A_j^* - A_j^* T$$

ومن السهل ملاحظة أنّ هذه المشتقات (المعادلات) تحقق العلاقة:

$$\delta_j(TS) = (\delta_j T)S + T(\delta_j S)$$

وبحسابٍ بسيطٍ نجد:

$$W\left(M_j f\right) = \bar{\delta}_j W(f)$$
و $$W\left(\bar{M}_j f\right) = \delta_j W(f)$$

وبالتكرار نحصل على العلاقات:

$$\bar{\delta}_j^{\alpha} W(f) = W(Z^{\alpha} f)$$
$$\delta_j^{\alpha} W(f) = W(\bar{Z}^{\alpha} f) \quad (4.5)$$

ولدينا الآن النسخة الثانية لمبرهنة Paley_ Wiener.

مبرهنة (4): [15]

بفرض أنّ $1 \leq p \leq 2$ ، $f \in L^p(\mathbb{C}^n)$، عندئذٍ تكون f دالّة ذات دعامة متراصّة في $|z| \leq B$، إذا وفقط إذا كان $W(f)$ يحقق:

$$\left\| \delta_j^{\alpha} \bar{\delta}_j^{\beta} W(f) \right\| \leq C B^{|\alpha|+|\beta|}$$

و ذلك لأجل α وβ دليلين متعددين.

الإثبات:

لتكن $\psi \in L^2(\mathbb{R}^n)$ φ،، عندئذٍ نعلم أنّ تحويل فورييه_ ويغنر لهما يحقق:

$$V_{\varphi}(\psi) \in L^q(\mathbb{C}^n)$$

و ذلك لأجل كل $q \geq 2$.

ولذلك فإنّه يكون لدينا العلاقة الآتية:

$$\left(W(f)\varphi، \psi\right) = (2\pi)^{\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{C}^n} f(z) V_{\varphi}\left(\psi، z\right) dz$$

ويكون $W(f)$ مؤثراً محدوداً على $L^2(\mathbb{R}^n)$، وذلك لأجل $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$.

إذا كانت f دالّة ذات دعامة في $|z| \leq B$، عندئذٍ باستخدام العلاقة (4.5) نحصل على المتراجحة:

$$\left\| \delta_j^{\alpha} \bar{\delta}_j^{\beta} W(f) \right\| \leq C \, \|f\|_p B^{|\alpha|+|\beta|}$$

و هذا يثبت الاتجاه المباشر من المبرهنة.

لإثبات العكس، ننظر إلى تحويل فورييه_ وايل:

$$\tilde{f}(\xi) = \int_{\mathbb{C}^n} e^{i(x.\xi'' - y\xi')} f(z) \pi(z) dz$$

بالاشتقاق بالنسبة لـ ξ'_j، نحصل على العلاقة:

$$\frac{\partial}{\partial \xi'_j} \tilde{f}(\xi) = \int_{\mathbb{C}^n} e^{i(x.\xi'' - y\xi')} \frac{1}{2}\left(\bar{z}_j - z_j\right) f(z) \pi(z) dz$$

و بالتالي نحصل على العلاقة:

$$\frac{\partial}{\partial \xi'_j} \tilde{f}(\xi) = \frac{1}{2} \mathrm{U}(\xi) \left(\delta_j - \bar{\delta}_j\right) W(f) \, \mathrm{U}(-\xi)$$

بشكلٍ مشابهٍ يُمكن أن نُبيّن العلاقة:

$$\frac{\partial}{\partial \xi''_j} \tilde{f}(\xi) = \frac{1}{2} \mathrm{U}(\xi) \left(\delta_j + \bar{\delta}_j\right) W(f) \, \mathrm{U}(-\xi)$$

وبالتكرار نحصل على النتيجة:

$$\partial_{\xi''}^{\beta}\partial_{\xi'}^{\alpha}\tilde{f}(\xi) = 2^{-(|\alpha|+|\beta|)}\mathrm{U}(\xi)\left(\delta+\bar{\delta}\right)^{\beta}\left(\delta-\bar{\delta}\right)^{\alpha}W(f)\mathrm{U}(-\xi)$$

و حسب الفرض فإننا نحصل على التقديرات:

$$\left\|\partial_{\xi''}^{\beta}\partial_{\xi'}^{\alpha}\tilde{f}(\xi)\right\| \leq C\, B^{|\alpha|+|\beta|}$$

و بالتالي لأجل كلّ $\zeta = \left(\zeta' ، \zeta''\right) \in \mathbb{C}^{2n}$، فإنّ المتسلسلة:

$$F(\zeta) = \sum_{\alpha ، \beta} \frac{\partial_{\xi''}^{\beta}\partial_{\xi'}^{\alpha}\tilde{f}(0)}{\alpha!\ \beta!}\zeta'^{\alpha}\zeta''^{\beta}$$

تتقارب وتُعرّف مؤثراً قيمته دالّة صحيحة.

وعلاوةً على ذلك، بما أنّ:

$$F(\xi + i\eta) = \sum_{\alpha ، \beta} \frac{\partial_{\xi''}^{\beta}\partial_{\xi'}^{\alpha}\tilde{f}\left(\xi' ، \xi''\right)}{\alpha!\ \beta!}(i\eta')^{\alpha}(i\eta'')^{\beta}$$

فإنّنا نحصل على التقدير:

$$\|F(\zeta)\| \leq C\, e^{B|Im(\zeta)|}$$

لذلك فإنّه من خلال المبرهنة السابقة، نستنتج أنّ f دالّة لها دعامة في $|z| \leq B$.

و هذا ما يُتمّ الإثبات.

الخلاصة:

وبذلك نكون قد أثبتنا مبرهنة بالي_ وينر لأجل تحويل فورييه، ثمّ لأجل تحويل فورييه_ وايل وانتقلنا بعد ذلك إلى مبرهنة بالي_ وينر لأجل تحويل وايل.

التوصيات:

يمكننا إثبات العديد من المبرهنات المهمَة الأخرى باستخدام زمرة هايزنبرغ والصيغ الجديدة التي قدَمتها للعديد من المفاهيم في التحليل الرياضي، حيث إنَها قد ساهمت أيضاً بصيغة جديدة لتحويلات ريس الشهيرة، وقدَمت توسعاً كبيراً في إثبات المبرهنات المتعلقة بهذه التحويلات.

قائمة المراجع:

1- سهى سلامة.: " دراسة في زمر لي وأهم الأمثلة عنها (زمرة هايزنبرغ) ". المجلة العربية للعلوم ونشر الأبحاث، 10.26389/AJSRP.S191019، (2020).

2- سهى سلامة.: " دوال هرميت ودوال هرميت الخاصة اعتماداً على زمرة هايزنبرغ ". المجلة العربية للعلوم ونشر الأبحاث، 10.26389/AJSRP.S201019، (2020).

3- سهى سلامة.: "دور زمرة هايزنبرغ في التحليل التوافقي". المجلة العربية للعلوم ونشر الأبحاث، 10.26389/AJSRP.S010719، (2019).

4- Casselman, B.: “Continuous representations”. University of British Columbia, (2019).

5- Celebi, R., Hendricks, K. and Jordan, M.: "The Heisenberg group and uncertainty principle in Mathematical physics". Research program under the supervision of Dr. Hadi Salamasian, university of Ottawa, (2015).

6- Fischer, V. and Ruzhansky, M.: "Quantization on nilpotent Lie groups". Progress in Mathematics, (2015).

7- Geller, D.: "Spherical harmonics, the Weyl transform and the Fourier transform on the Heisenberg group". Canad. J. Math. 36 (1984), no. 4, 615_ 684.

8- Ghosh, S. and Srivastava, R.K.: "Heisenberg uniqueness pairs for the Fourier transform on the Heisenberg group". Guwahati, India, (2018).

9- Kisil, V.: "The Heisenberg group in Mathematics and physics". University of Leeds, England, Varna, (2016).

10- Krantz, S.: "Explorations in Harmonic Analysis with applications to complex function theory and the Heisenberg group". Birkhäuser, Boston, (2009).

11- Kunze, R.:" L^p Fourier transforms on locally compact unimodular groups". Trans. Amer. Math. Soc., 89 (1958), 519_ 540.

12- Lakshmi Lavanya, R. and Thangavelu, S.: "A characterization of the Fourier transform on the Heisenberg group". Ann. Funct. Anal. 3, no. 1, 109_ 120, (2012).

13- Rantnakumar, P.K.: "On Schrödinger propagator for the special Hermite operator". J Fourier Anal Appl 14: 286_ 300, Boston, (2008).

14- Rottensteiner, D.: "Foundations of Harmonic analysis on the Heisenberg group". Progress for obtaining the academic degree: Master of science, University of Vienna, (2010).

15- Rudin, W.: "Functional analysis", MC Graw_ Hill, New York (1973).

16- Thangavelu, S.: "Harmonic analysis on the Heisenberg group". Progress in Mathematics 159, Birkhäuser, Boston, MA, (1998).

17- Woit, P.: "Quantum theory, groups and representations: An introduction (final draft version)". Columbia university, (2017).